Rozdział 6

Równania liniowe

6.1. Przekształcenia liniowe

Niech X oraz Y będą dwiema niepustymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$.

Definicja 6.1. *Funkcję $f : X \to Y$ spełniającą warunki:*

a) *dla dowolnych $x_1, x_2 \in X : f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;*
b) *dla dowolnych $x \in X, \alpha \in \mathbb{F} : f(\alpha x) = \alpha f(x)$*

nazywamy **przekształceniem liniowym**.

Przypuśćmy, że wymiary przestrzeni X oraz Y są skończone; niech $\dim X = n$ oraz $\dim Y = m$. Przyjmijmy, że wektory $e_1, \ldots, e_n$ stanowią bazę przestrzeni X, a wektory $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_m$ bazę przestrzeni Y. Z odwzorowaniem liniowym $f : X \to Y$ możemy wówczas stowarzyszyć macierz $A_f = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$, której i–tą kolumnę ($i = 1, \ldots, n$) tworzą współrzędne wektora $f(e_i)$ wyrażonego jako kombinacja liniowa wektorów bazowych przestrzeni Y:

$$\begin{array}{c} f(e_1) = a_{11}\tilde{e}_1 + a_{21}\tilde{e}_2 + \cdots + a_{m1}\tilde{e}_m, \\ f(e_2) = a_{12}\tilde{e}_1 + a_{22}\tilde{e}_2 + \cdots + a_{m2}\tilde{e}_m, \\ \vdots \\ f(en) = a_{1n}\tilde{e}_1 + a_{2n}\tilde{e}_2 + \cdots + a_{mn}\tilde{e}_m \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad A_f = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Przykład 6.1. *Rozważmy odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określone wzorem*

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + z).$$

Przyjmując w przestrzeniach X oraz Y bazy kanoniczne mamy:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (1,2) = \tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_2, \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (1,0) = \tilde{e}_1, \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (-1,1) = -\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2. \end{aligned}$$

Odwzorowanie f jest więc reprezentowane przez macierz

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

innymi słowy

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Przykład 6.2. *Niech $F : \pi_1 \to \pi_2$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem:*

$$F(f(x)) = 2xf(x) - f(x).$$

Łatwo sprawdzić, że F jest odwzorowaniem liniowym. Przyjmując w przestrzeniach π_1 oraz π_2 bazy

$$\begin{aligned} &w\ \pi_1 : e_1(x) = 1, e_2(x) = x \\ &w\ \pi_2 : \tilde{e}_1(x) = 1, \tilde{e}_2(x) = x, \tilde{e}_3(x) = x^2 \end{aligned}$$

mamy:

$$\begin{aligned} F(e_1) &= F(1) = 2x - 1 = -\tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_2, \\ F(e_2) &= F(x) = 2x^2 - x = 0\tilde{e}_1 - \tilde{e}_2 + 2\tilde{e}_3. \end{aligned}$$

Przy przyjętych bazach, odwzorowanie F reprezentowane jest przez macierz

$$A_F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Przykład 6.3. *Rozważmy ponownie odwzorowanie F z przykładu 6.2. Przyjmując w przestrzeni π_1 bazę*

$$e_1(x) = x + 1, \qquad e_2(x) = x - 1,$$

a w przestrzeni π_2 bazę

$$\tilde{e}_1(x) = x - 1, \quad \tilde{e}_2(x) = x + 1, \quad \tilde{e}_3(x) = x^2,$$

mamy

$$\begin{aligned} F(e_1) &= F(x+1) = 2x(x+1) - (x+1) = 2x^2 + x - 1 = \tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_3, \\ F(e_2) &= F(x-1) = 2x(x-1) - (x-1) = 2x^2 - 3x + 1 = \alpha_{21}\tilde{e}_1 + \alpha_{22}\tilde{e}_2 + 2\tilde{e}_3. \end{aligned}$$

Skalary α_{21}, α_{22} wyznaczymy rozwiązując równanie

$$-3x + 1 = \alpha_{21}(x-1) + \alpha_{22}(x+1).$$

Po prostych rachunkach otrzymujemy: $\alpha_{21} = -2, \alpha_{22} = -1$. Tym razem odwzorowanie F jest reprezentowane przez macierz

$$A_F = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Z powyższych przykładów wynika, że postać macierzy reprezentującej odwzorowanie liniowe $f : X \to Y$ zależy od wyboru baz w przestrzeniach X, Y.

6.2. Jądro i obraz odwzorowania liniowego

Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym, a $V \subset X$ i $W \subset Y$ dowolnymi podprzestrzeniami liniowymi. Łatwo sprawdzić (ćwiczenie), że zbiory

$$f(V) = \{y \in Y : \exists x \in V : y = f(x)\},$$
$$f^{-1}(W) = \{x \in X : \exists y \in W : y = f(x)\}$$

z działaniami indukowanymi z przestrzeni X oraz Y, są podprzestrzeniami liniowymi, odpowiednio, przestrzeni X oraz Y.

Definicja 6.2. *Zbiór* $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ *nazywamy* **jądrem** *odwzorowania* f; *zbiór* $\operatorname{Im} f = f(X)$ *nazywamy* **obrazem** *odwzorowania* f.

Z obserwacji poprzedzającej powyższą definicję wynika, że

- *jądro odwzorowania liniowego* $f : X \to Y$ *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* X;
- *obraz odwzorowania liniowego* $f : X \to Y$ *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* Y.

Przy wyznaczaniu jądra oraz obrazu odwzorowania liniowego przydatne bywa następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.1. *Niech* X *oraz* Y *będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi oraz niech* $f : X \to Y$ *będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas*

$$\dim X = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f. \tag{6.1}$$

Dowód: Niech $\dim \ker f = k$ oraz $\dim X = n$; oczywiście $k \leqslant n$. Przypuśćmy, że wektory $e_1, \ldots, e_k$ tworzą bazę przestrzeni $\ker f$. Wektory te możemy uzupełnić o wektory $e_{k+1}, \ldots, e_n$ tak, aby $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\} = X$.

W celu wykazania równości (6.1) wystarczy udowodnić, że $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\{f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)\}$ oraz, że wektory $f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)$ są liniowo niezależne.

Niech $y \in \operatorname{Im} f$. Oznacza to, że istnieje $x \in X = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ dla którego $y = f(x)$. Mamy więc

$$\begin{aligned} y = f(x) &= f\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = f\left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i\right) \\ &= f\left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i\right) + f\left(\textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i\right) = f\left(\textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(e_i), \end{aligned}$$

co oznacza, że $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\{f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)\}$.

Wykażemy teraz, że wektory $f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)$ są liniowo niezależne. Mamy

$$\textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i\right) = 0,$$

zatem $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i \in \ker f = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$. Stąd, istnieją skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dla których

$$\textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i,$$

lub równoważnie

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i - \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i = 0.$$

Z liniowej niezależności wektorów $e_1, \ldots, e_n$ wynika, że $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. ∎

Z powyższego dowodu wynika, że $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$, gdzie $e_1, \ldots, e_n$ jest dowolną bazą przestrzeni X. Niech A_f będzie macierzą odwzorowania f przy ustalonych bazach przestrzeni X oraz Y. Ponieważ i–ta kolumna macierzy A_f to współrzędne wektora $f(e_i)$ w ustalonej bazie przestrzeni X, zatem liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy A_f równa jest liczbie liniowo niezależnych wektorów spośród wektorów $f(e_1), \ldots, f(e_n)$. Wynika stąd następujące

Twierdzenie 6.2. *Niech X oraz Y będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi, niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym oraz niech A_f będzie macierzą odwzorowania f (przy ustalonych bazach przestrzeni X oraz Y). Wówczas*

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank}(A_f).$$

Przykład 6.4. *Rozważmy ponownie odwzorowanie z przykładu 6.2:*

$$F(f(x)) = 2xf(x) - f(x).$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\ker F &= \{x \to ax + b : 2x(ax+b) - ax - b \equiv 0\} \\ &= \left\{x \to ax + b : 2ax^2 + (2b-a)x - b \equiv 0\right\} = \{0\}.\end{aligned}$$

Zatem

$$2 = \dim \pi_1 = \dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F = 0 + \dim \operatorname{Im} F.$$

Stąd $\operatorname{Im} F = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$, *gdzie*

$$\begin{aligned}e_1(x) &= F(1) = 2x - 1 \\ e_2(x) &= F(x) = 2x^2 - x = x(2x-1).\end{aligned}$$

Ostatecznie $\operatorname{Im} F = \pi_2\left(\frac{1}{2}\right)$.

6.3. Układy równań liniowych

Rozważmy układ m równań liniowych o n niewiadomych $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{6.2}$$

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{F}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$; $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. W przypadku, gdy $b_1 = \cdots = b_m = 0$ układ (6.2) nazywamy **układem jednorodnym**. Przyjmując oznaczenia:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

układ równań (6.2) możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$Ax = b. \tag{6.3}$$

6.3.1. Twierdzenie Cramera

W przypadku, gdy liczba równań układu (6.2) jest równa liczbie niewiadomych, macierz A jest macierzą kwadratową. Jeżeli jest to macierz nieosobliwa, to układ równań (6.2) nazywamy **układem Cramera**. Rozwiązanie równania (6.3) – a więc i układu (6.2) – można wówczas prosto wyliczyć wykorzystując macierz A^{-1}:

$$x = A^{-1}b.$$

Rozwiązanie układu równań (6.2) można również wyrazić stosując **wzory Cramera**.

Twierdzenie 6.3 (Cramer). *Niech $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{F}^n$. Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to układ równań (6.3) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $x = (x_1, \ldots, x_n)$:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \qquad (i = 1, \ldots, n)\,, \tag{6.4}$$

macierz A_i oznacza macierz powstałą z macierzy A przez zastąpienie jej i–tej kolumny wektorem b.

Dowód: Niech $a_{\cdot i}$ oraz $I_{\cdot i}$ oznaczają i–te kolumny odpowiednio macierzy A oraz macierzy jednostkowej I_n. Wówczas

$$\begin{aligned}\frac{\det A_i}{\det A} &= \frac{\det\left[a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, \ldots, a_{\cdot i-1}, b, a_{\cdot i+1}, \ldots, a_{\cdot n}\right]}{\det A}\\ &= \det\left(A^{-1}\left[a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, \ldots, a_{\cdot i-1}, b, a_{\cdot i+1}, \ldots, a_{\cdot n}\right]\right)\\ &= \det\left[A^{-1}a_{\cdot 1}, A^{-1}a_{\cdot 2}, \ldots, A^{-1}a_{\cdot i-1}, A^{-1}b, A^{-1}a_{\cdot i+1}, \ldots, A^{-1}a_{\cdot n}\right]\\ &= \det\left[I_{\cdot 1}, I_{\cdot 2}, \ldots, I_{\cdot i-1}, x, I_{\cdot i+1}, \ldots, I_{\cdot n}\right] = x_i.\end{aligned}$$

■

Łatwo stwierdzić, że układ równań jednorodnych ma zawsze przynajmniej jedno rozwiązanie; jest nim rozwiązanie zerowe. Z twierdzenia Cramera wynika natomiast, że jeżeli jednorodny układ równań liniowych jest układem Cramera, to rozwiązanie to jest jego jedynym rozwiązaniem.

Przykład 6.5. *Rozważmy układ równań*

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}.$$

Mamy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \textit{oraz} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det A = -3$ *zatem jest to układ Cramera, którego rozwiązanie określa wzór (6.4):*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = 2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{5}{3}.$$

6.3.2. Twierdzenie Kroneckera–Capellego

Rozważmy, jak poprzednio, układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, b \in \mathbb{F}^m$. Niech $U \in \mathbb{F}^{m\times(n+1)}$ będzie macierzą powstałą z macierzy A przez dołączenie do tej ostatniej dodatkowej kolumny – wektora b, tj.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Macierz U nazywamy **macierzą uzupełnioną**. Jest jasne, że $\operatorname{rank} U \geqslant \operatorname{rank} A$. Z postaci równania (6.2), które możemy zapisać w postaci:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

wynika, że układ równań $Ax = b$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wektor b jest kombinacją liniową kolumn macierzy A. Warunek ten możemy równoważnie wyrazić jako równość

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} U.$$

Twierdzenie 6.4 (Kroneckera-Capellego). *Układ równań $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, b \in \mathbb{F}^m$, ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} U$. *Ponadto:*

- *jeżeli* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} U = n$ *(n– liczba niewiadomych) to rozwiązanie to jest jedyne;*
- *jeżeli* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} U = r < n$ *to rozwiązań jest nieskończenie wiele; wszystkie one dają się wyrazić jako funkcja zależna od $n - r$ parametrów.*

Przykład 6.6. *Rozważmy układ równań:*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}.$$

Mamy $n = 3$ oraz

$$U = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Rzędy macierzy A oraz U wyznaczymy korzystając z metody eliminacji Gaussa:

$$\operatorname{rank}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] = \operatorname{rank}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right] = \operatorname{rank}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right].$$

Oznacza to, że $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} U = 2$. *Z twierdzenia 6.4 wynika więc, że rozważany układ równań posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego ($n - \operatorname{rank} A$) parametru. Wyznaczymy te rozwiązania.*

Sposób 1. *Mając wyjściowy układ równań sprowadzony do postaci trójkątnej, poszukiwane rozwiązanie wyznaczymy klasyczną metodą dedykowaną dla układów o macierzach trójkątnych:*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sposób 2. *Skoro* $\operatorname{rank} A = 2$ *to macierz A zawiera nieosobliwą podmacierz stopnia 2; odnajdujemy tę macierz w rozwiązywanym układzie równań. Równania, które nie wchodzą w skład tej macierzy odrzucamy, z kolei niewiadome, których wybrana podmacierz nie obejmuje, przerzucamy na drugą stronę równania i traktujemy jako parametry. Układ równań, jaki w ten sposób otrzymujemy, jest układem Cramera – do jego rozwiązania stosujemy wzory (6.4).*

W naszym przypadku, ponieważ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

zatem układy równań

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2x - y = -1 - 2z \end{cases}$$

są równoważne (mają te same rozwiązania). Stosując do tego ostatniego układu wzory (6.4), mamy:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ -1-2z & -1 \end{vmatrix}}{-3} = -z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & -1-2z \end{vmatrix}}{-3} = 1, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

6.4. Metoda eliminacji Gaussa

Przedstawiony poniżej sposób rozwiązywania układów równań liniowych jest pewnym uproszczeniem algorytmu zwanego metodą eliminacji Gaussa. Metoda ta, niezwykle efektywna pod względem numerycznym (nie istnieje algorytm rozwiązywania układów równań wymagający istotnie mniejszej liczby działań niż metoda eliminacji Gaussa), polega na sprowadzeniu macierzy uzupełnionej odpowiadającej rozwiązywanemu układowi równań do uogólnionej postaci trójkątnej (nazywanej również postacią schodkową). Aby osiągnąć ten efekt, na macierzy uzupełnionej wykonujemy dwa rodzaje operacji:

- dodajemy do wybranego wiersza sumy pozostałych wierszy pomnożonych przez odpowiednio dobrane stałe;
- zamieniamy kolejność wierszy.

Do uzyskanej w ten sposób macierzy stosujemy twierdzenie Kroneckera–Capellego. Warto przypomnieć w tym miejscu, że pierwsza z wymienionych powyżej operacji nie zmienia wartości wyznacznika, druga może zmienić jedynie jego znak. W efekcie, metoda eliminacji Gaussa może być również stosowana do obliczania rzędu i wyznacznika macierzy oraz do wyznaczania macierzy odwrotnej. Ideę metody eliminacji Gaussa wyjaśnimy na kilku przykładach.

Przykład 6.7 (rozwiązywanie układu oznaczonego). *Celem naszym jest rozwiązanie układu równań*

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 0 \\ -x - 2y - z + w = 1 \\ x + y - 2z - 3w = 2 \\ 4x - 2y + 4w = 2 \end{cases}. \tag{6.5}$$

Macierz uzupełniona U rozważanego układu ma postać

$$U = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right).$$

W pierwszym kroku metody eliminacji Gaussa wykorzystujemy pierwszy wiersz, nazywany ***wierszem głównym dla pierwszego kroku.*** *Postępujemy w sposób następujący: do drugiego wiersza dodajemy pierwszy pomnożony przez $\frac{1}{2}$; do trzeciego pomnożony przez $-\frac{1}{2}$; do czwartego pomnożony przez*

-2. *Liczbę 2 – pierwszy niezerowy element wiersza głównego nazywamy* ***elementem głównym dla pierwszego kroku****. Otrzymujemy*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 + \frac{1}{2}w_1 \\ w_3 \rightarrow w_3 - \frac{1}{2}w_1 \\ w_4 \rightarrow w_4 - 2w_1 \end{array} \right. \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

W kolejnym kroku, wierszem głównym jest wiersz drugi nazywany ***wierszem głównym dla drugiego kroku****; elementem głównym dla drugiego kroku jest* $-\frac{3}{2}$. *Postępujemy analogicznie jak w kroku pierwszym: do wiersza trzeciego dodajemy wiersz drugi pomnożony przez* $\frac{1}{3}$; *do wiersza czwartego pomnożony przez* $-\frac{8}{3}$. *Otrzymujemy:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3 + \frac{1}{3}w_2 \\ w_4 \rightarrow w_4 - \frac{8}{3}w_2 \end{array} \right. \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -2 & -\frac{2}{3} \end{array}\right).$$

W ostatnim, trzecim kroku wierszem głównym jest wiersz trzeci – ***wiersz główny dla kroku trzeciego****; elementem głównym jest* $-\frac{8}{3}$. *Mnożąc trzeci wiersz przez* $-\frac{1}{4}$ *i dodając do wiersza czwartego otrzymujemy:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -2 & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3 \\ w_4 \rightarrow w_4 - \frac{1}{4}w_3 \end{array} \right. \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right). \tag{6.6}$$

Uzyskana w ten sposób macierz schodkowa jest macierzą uzupełnioną układu równań posiadającego te same rozwiązania, co wyjściowy układ:

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x + y + z + w = 0 \\ -\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}w = 1 \\ -\frac{8}{3}z - 3w = \frac{7}{3} \\ -\frac{5}{4}w = -\frac{5}{4} \end{array} \right. .$$

Z postaci macierzy widać również, że układ ten posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Wyznaczamy je rozwiązując otrzymany układ równań w kolejności od ostatniego równania do pierwszego. Uzyskujemy kolejno:

$$w = 1, z = -2, y = 1, x = 0.$$

Warto zanotować, że operacje jakie wykonywaliśmy na macierzy wyjściowego układu równań (6.5), aby sprowadzić ją do postaci trójkątnej (6.6) nie zmieniły jej wyznacznika. Ponieważ wyznacznik macierzy trójkątnej równy jest iloczynowi wyrazów z przekątnej mamy

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -10.$$

Przykład 6.8 (rozwiązywanie układu nieoznaczonego). *Rozważmy układ równań*

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 6 \\ \quad -4x + 2z = 0 \\ \quad\quad 2y - 2z = 4 \end{cases}.$$

Macierz uzupełniona tego układu ma postać

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

W pierwszym kroku metody eliminacji Gaussa do wiersza drugiego dodajemy wiersz pierwszy pomnożony przez 2; wiersz trzeci natomiast przepisujemy bez zmian:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 + 2w_1 \\ w_3 \rightarrow w_3 \end{array} \right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

W kroku drugim, do wiersza trzeciego dodajemy wiersz drugi pomnożony przez $-\frac{1}{3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3 - \frac{1}{3}w_2 \end{array} \right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

łatwo teraz stwierdzić, korzystając z twierdzenia Kroneckera – Capellego, że rozważany układ równań jest nieoznaczony (posiada nieskończenie wiele rozwiązań). Jest on równoważny układowi

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 6 \\ \quad 6y - 6z = 12 \end{cases},$$

którego rozwiązania, równe rozwiązaniom wyjściowego układu, mają postać

$$x = t, y = 2 + 2t, z = 2t,$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$ *jest dowolnym parametrem.*

Przykład 6.9 (rozwiązywanie układu sprzecznego). *Rozważmy układ równań*

$$\begin{cases} 5x - 2y - z = 1 \\ -2x + 2y - 2z = 2 \\ -x - 2y + 5z = 1 \end{cases},$$

dla którego macierz uzupełniona U *ma postać*

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

W pierwszym kroku metody eliminacji Gaussa do wiersza drugiego dodajemy wiersz pierwszy pomnożony przez $\frac{2}{5}$; do wiersza trzeciego pomnożony przez $\frac{1}{5}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right) \to \left| \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 + \frac{2}{5}w_1 \\ w_3 \to w_3 + \frac{1}{5}w_1 \end{array} \right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & -\frac{12}{5} & \frac{24}{5} & \frac{6}{5} \end{array}\right).$$

W drugim kroku do wiersza trzeciego dodajemy wiersz drugi pomnożony przez 2*:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & -\frac{12}{5} & \frac{24}{5} & \frac{6}{5} \end{array}\right) \to \left| \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 + 2w_2 \end{array} \right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Na podstawie twierdzenia Kroneckera – Capellego stwierdzamy, że otrzymany układ równań jest sprzeczny. Oznacza to, że i wyjściowy układ równań nie posiada rozwiązań.