Rozdział 8

Postać Jordana macierzy

8.1. Macierz Jordana

Niech $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Macierz $J_r(\lambda) \in \mathbb{F}^{r\times r}$ postaci

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

nazywamy **klatką Jordana** stopnia r. Oczywiście $J_1(\lambda) = [\lambda]$.

Definicja 8.1. *Macierz blokową $J \in \mathbb{F}^{n\times n}$ postaci*

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix},$$

gdzie $n_1+\ldots+n_k = n$ oraz wszystkie niewypisane elementy macierzy J są zerami, nazywamy **macierzą Jordana**.

Skalary $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tworzące przekątną macierzy J są jej wartościami własnymi. Zauważmy również, że każda macierz diagonalna jest macierzą Jordana; wymiar każdej klatki Jordana J_{n_i} tworzącej przekątną tej macierzy jest równy jeden, tj. $J_{n_i} = [\lambda_i]$. Oznacza to, że każda macierz diagonalizowalna jest podobna do pewnej macierzy Jordana (zob. podrozdział 7.3, str. 50). Prawdziwe jest również dużo ogólniejsze

Twierdzenie 8.1. *Niech $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ będzie dowolną macierzą. Istnieje wówczas macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taka że*

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

oraz $n_1 + \ldots + n_k = n$. *Macierz Jordana* J *macierzy* A *jest wyznaczona w sposób jednoznaczny z dokładnością do kolejności klatek Jordana, które tworzą przekątną macierzy* J. *Ponadto, jeżeli macierz* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ma tylko rzeczywiste wartości własne to macierz* P, *ustalająca podobieństwo* A *oraz* J, *również może być wybrana jako macierz o elementach rzeczywistych.*

Przykład 8.1. *Niech*

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dla $\varepsilon \neq 0$. *Ponieważ* $\sigma(A_\varepsilon) = \{0, \varepsilon\}$ *zatem macierz* A_ε *jest diagonalizowalna. Łatwo wykazać, że*

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = S_\varepsilon J_\varepsilon S_\varepsilon^{-1}.$$

Oznacza to, że macierz

$$J_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

jest macierzą Jordana macierzy A_ε, *dla dowolnego* $\varepsilon \neq 0$. *Jednak, jeżeli* $\varepsilon \to 0$ *to* $J_\varepsilon \to [0]_{2\times 2}$, *podczas gdy macierzą Jordana macierzy* A_0 *jest macierz*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 8.1. *Macierz Jordana* J *wyznaczona dla macierzy* A *nie musi być funkcją ciągłą elementów macierzy* A. *Oznacza to trudności z konstrukcją numerycznie akceptowalnego algorytmu wyznaczania, dla zadanej macierzy* A, *odpowiadającej jej macierzy Jordana.*

8.1.1. Własności macierzy Jordana

Niech $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ będzie dowolną macierzą, a $J \in \mathbb{F}^{n\times n}$ jej macierzą Jordana.

Własność 1 *Liczba* k *klatek Jordana tworzących macierz* J *jest równa liczbie liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy* A.

Własność 2 *Liczba klatek Jordana odpowiadających wartości własnej* λ *jest równa wymiarowi przestrzeni własnej macierzy* A *odpowiadającej tej wartości własnej (czyli liczbie liniowo niezależnych wektorów własnych odpowiadających wartości własnej* λ*). Suma stopni wszystkich tych klatek równa jest krotności wartości własnej* λ *jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego macierzy* A.

Przykład 8.2. *Rozważmy macierz* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *postaci*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

zatem macierz ma dwie wartości własne: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Wyznaczmy wymiary przestrzeni własnych odpowiadających tym wartościom własnym. Mamy:

$$\begin{aligned}
\dim V_{\lambda_1} &= \dim \{\ker (A - I)\} = 3 - \dim \{\operatorname{Im} (A - I)\} \\
&= 3 - \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1, \\
\dim V_{\lambda_2} &= \dim \{\ker (A - 2I)\} = 3 - \dim \{\operatorname{Im} (A - 2I)\} \\
&= 3 - \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 1.
\end{aligned}$$

Na podstawie własności 1, macierz Jordana macierzy A składa się z dwóch klatek Jordana (możemy wybrać tylko dwa liniowo niezależne wektory własne). Na podstawie własności 2, wartości własnej $\lambda_1 = 1$ odpowiada jedna klatka Jordana stopnia 1, wartości własnej $\lambda_2 = 2$ musi więc odpowiadać jedna klatka Jordana stopnia 2. Macierz Jordana macierzy A ma więc postać

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Przykład 8.3. *Rozważmy macierz $J \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ postaci*

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c}
2 & 1 & 0 & & & & & \\
0 & 2 & 1 & & & & & \\
0 & 0 & 2 & & & & & \\ \hline
& & & 2 & 1 & & & \\
& & & 0 & 2 & & & \\ \hline
& & & & & 3 & 1 & \\
& & & & & 0 & 3 & \\ \hline
& & & & & & & 3
\end{array}\right],$$

w której wszystkie niewypisane elementy są zerami. Macierz J jest macierzą Jordana. Posiada ona dwie wartości własne: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Z własności 2 wynika, że dla każdej z nich można wybrać tylko pod dwa liniowo niezależne wektory własne.

Powyższy przykład pokazuje, że w celu wyznaczenia macierzy Jordana dowolnej macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ o znanych wartościach własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, musimy umieć znajdować liczbę $N(m, \lambda)$ klatek Jordana stopnia m ($1 \leqslant m \leqslant n$) odpowiadających wartości własnej λ macierzy A. Aby wyznaczyć tę liczbę, zdefiniujmy ciąg $r_k(\lambda)$:

$$r_k(\lambda) = \operatorname{rank}\left((A - \lambda I)^k\right), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{8.2}$$

Oczywiście $r_0(\lambda) = \operatorname{rank} I = n$. Zauważmy ponadto, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$:

$$\ker\left((A - \lambda I)^k\right) \subset \ker\left((A - \lambda I)^{k+1}\right). \tag{8.3}$$

Dzieje się tak, gdyż dla $x \in \ker\left((A - \lambda I)^k\right)$:

$$(A - \lambda I)^{k+1} x = (A - \lambda I)\left((A - \lambda I)^k x\right) = (A - \lambda I)\, 0 = 0,$$

skąd wynika, że $x \in \ker\left((A - \lambda I)^{k+1}\right)$.

Z warunku (8.3) wynika natychmiast, że

$$\dim\ker\left((A-\lambda I)^k\right) \leqslant \dim\ker\left((A-\lambda I)^{k+1}\right);$$

tym samym

$$\begin{aligned} r_k(\lambda) &= \operatorname{rank}\left((A-\lambda I)^k\right) = n - \dim\ker\left((A-\lambda I)^k\right) \geqslant \\ &\geqslant n - \dim\ker\left((A-\lambda I)^{k+1}\right) = \operatorname{rank}\left((A-\lambda I)^{k+1}\right) = r_{k+1}(\lambda). \end{aligned}$$

Ciąg $r_k(\lambda)$ określony wzorem (8.2) jest więc ciągiem nierosnącym. Oznacza to, że od pewnego miejsca ciąg $r_k(\lambda)$ musi się stabilizować (tzn. staje się ciągiem stałym).

Własność 3 *Liczba $N(m,\lambda)$ klatek Jordana stopnia $m \geqslant 1$ odpowiadających wartości własnej λ jest równa:*

$$N(m,\lambda) = r_{m-1}(\lambda) - 2r_m(\lambda) + r_{m+1}(\lambda). \tag{8.4}$$

Aby zilustrować powyższą własność rozważmy następujący przykład.

Przykład 8.4. *Niech $J \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ będzie macierzą z przykładu 8.3. Macierz J ma dwie wartości własne: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Ponieważ*

- *dla $\lambda_1 = 2$:*

$$J-2I = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ \hline & & & & & & & 1 \end{array}\right]$$

$$(J-2I)^2 = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & & & 1 & 2 & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ \hline & & & & & & & 1 \end{array}\right]$$

$$(J-2I)^3 = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & & & 1 & 3 & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ \hline & & & & & & & 1 \end{array}\right]$$

zatem $r_0(2) = 8, r_1(2) = 6, r_2(2) = 4$ *oraz* $r_k(2) = 3$ *dla* $k \geqslant 3$. *Tym samym:*

$$\begin{aligned} N(1,2) &= 8 - 12 + 4 = 0, \\ N(2,2) &= 6 - 8 + 3 = 1, \\ N(3,2) &= 4 - 6 + 3 = 1, \\ N(k,2) &= 0, \ \text{dla } k \geqslant 4. \end{aligned}$$

Oznacza to, że wartości własnej $\lambda_1 = 2$ *odpowiadają dwie klatki Jordana: jedna stopnia* 2 *i jedna stopnia* 3.

- *dla* $\lambda_2 = 3$*:*

$$J - 3I = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} -1 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & -1 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & & & \\ \hline & & & -1 & 1 & & & \\ & & & 0 & -1 & & & \\ \hline & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ \hline & & & & & & & 0 \end{array}\right]$$

$$(J - 3I)^2 = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} 1 & -2 & 1 & & & & & \\ 0 & 1 & -2 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ \hline & & & 1 & -2 & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ \hline & & & & & & & 0 \end{array}\right]$$

zatem $r_0(3) = 8, r_1(3) = 6$ *oraz* $r_k(3) = 5$ *dla* $k \geqslant 2$. *Tym samym:*

$$\begin{aligned} N(1,3) &= 8 - 12 + 5 = 1, \\ N(2,3) &= 6 - 10 + 5 = 1, \\ N(k,3) &= 0, \ \text{dla } k \geqslant 3. \end{aligned}$$

Wartości własnej $\lambda_2 = 3$ *odpowiadają więc dwie klatki Jordana: jedna stopnia* 1 *i jedna stopnia* 2. *Postać macierzy* J *potwierdza uzyskane wyniki.*

Pewną niedogodnością faktoryzacji (tj. rozkładu) Jordana $A = PJP^{-1}$ jest to, że w przypadku macierzy rzeczywistej posiadającej nierzeczywiste wartości własne jej macierz Jordana jest macierzą nierzeczywistą. W wielu zagadnieniach praktycznych, oznacza to konieczność poszukiwania innego rozkładu macierzy, nie tak prostego jak rozkład Jordana, ale prowadzącego do macierzy rzeczywistych.

8.2. Rzeczywista macierz Jordana*

Niech $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz niech λ i $\overline{\lambda}$ będzie parą nierzeczywistych sprzężonych wartości własnych macierzy A. Ponieważ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, zgodnie z (8.2),

$$r_k(\lambda) = \operatorname{rank}(A - \lambda I)^k = \operatorname{rank}\left(A - \overline{\lambda} I\right)^k = r_k\left(\overline{\lambda}\right)$$

zatem liczba $N(m, \lambda)$ klatek Jordana stopnia m odpowiadających wartości własnej λ jest równa liczbie $N\left(m, \overline{\lambda}\right)$ klatek Jordana stopnia m odpowiadających wartości własnej $\overline{\lambda}$. Oznacza to, że klatki

Jordana $J_m(\lambda)$ oraz $J_m\left(\overline{\lambda}\right)$, tworzące przekątną macierzy Jordana, muszą występować parami. Łatwo wykazać, że macierz

$$\begin{bmatrix} J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & J_m\left(\overline{\lambda}\right) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}$$

jest podobna do macierzy

$$\begin{bmatrix} D(\lambda) & I_2 & & 0 \\ & D(\lambda) & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & D(\lambda) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}, \tag{8.5}$$

gdzie $D(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix}$ oraz I_2 to macierz jednostkowa stopnia 2; macierzą P ustalającą to podobieństwo jest stosownie wybrana macierz permutacji.

Przykład 8.5. *Rozważmy macierz*

$$\begin{bmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2\left(\overline{\lambda}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Niech $I_n^{(i,j)}$ będzie macierzą powstałą z macierz jednostkowej I_n przez zamianę miejscami kolumn o indeksach i oraz j. Jest to tzw. macierz permutacji – pomnożenie dowolnej macierzy przez macierz $I_n^{(i,j)}$ z prawej (z lewej) strony powoduje zamianę miejscami kolumn (wierszy) o indeksach i oraz j. Wynika stąd, że $\left(I_n^{(i,j)}\right)^{-1} = I_n^{(i,j)}$. W rozważanym przypadku mamy

$$\begin{aligned} \left(I_4^{(2,3)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2\left(\overline{\lambda}\right) \end{bmatrix} I_4^{(2,3)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wracając do rozważań, zauważmy, że dla macierzy S postaci

$$S = \begin{bmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

dla której

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix},$$

przyjmując $\lambda = a + ib$, mamy

$$\begin{aligned} SD(\lambda)S^{-1} = SD(a+ib)S^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Przyjmując oznaczenie $C(a,b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, łatwo stwierdzić, że macierz (8.5) jest podobna do macierzy rzeczywistej

$$C_m(a,b) = \begin{bmatrix} C(a,b) & I_2 & & 0 \\ & C(a,b) & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & C(a,b) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}; \tag{8.6}$$

macierzą ustalającą to podobieństwo jest macierz blokowa $\operatorname{diag}(S,\ldots,S)$.

Otrzymane wyniki podsumujemy w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 8.2. *Dowolna macierz rzeczywista $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest podobna do macierzy rzeczywistej*

$$J_{\text{real}} = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) & & & \\ & & & C_{m_1}(a_1,b_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & C_{m_l}(a_l,b_l) \end{bmatrix}, \tag{8.7}$$

w której $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ to rzeczywiste, a $a_1+ib_1,\ldots,a_l+ib_l$ nierzeczywiste wartości własne macierzy A; rzeczywiste macierze blokowe $J_{n_i}(\lambda_i)$ to klatki Jordana macierzy A występujące w jej postaci Jordana, bloki $C_{m_i}(a_i,b_i)$ stopnia $2m_i$ są postaci (8.6); $n_1+\ldots+n_k+2(m_1+\ldots+m_l)=n$.

Przykład 8.6. *Niech $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ będzie macierzą dla której $\sigma(A)=\{1, 1\pm i\}$ i taką że*

$$N(1,1+i) = N(1,1-i) = 2.$$

Z rozważań poprzedzających twierdzenie wynika, że jeżeli λ jest nierzeczywistą wartością własną macierzy A to liczba $N(m,\lambda)$ równa jest liczbie macierzy postaci (8.5) stopnia $2m$ tworzących rzeczywistą macierz Jordana J_{real} macierzy A. Tym samym, w rozważanym przypadku macierze Jordana J oraz J_{real} mają postać

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}, \quad J_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przypuśćmy teraz, że dla macierzy $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, dla której $\sigma(A)=\{1,1\pm i\}$, mamy

$$N(2,1+i) = N(2,1-i) = 1.$$

W tym przypadku macierze Jordana J oraz J_{real} mają postać

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}, \quad J_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$