Rozdział 9

Baza Jordana

Niech X będzie n–wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Rozważmy dowolny endomorfizm $f : X \to X$. Wiemy, że postać macierzy endomorfizmu zależy od wyboru bazy w przestrzeni X. Wiemy również, że jeżeli endomorfizm f jest diagonalizowalny, to jego macierz w bazie przestrzeni X złożonej z jego n liniowo niezależnych wektorów własnych jest macierzą diagonalną. Ponieważ nie każdy endomorfizm jest diagonalizowalny, zatem nasuwa się pytanie o to, jak prosta może być postać macierzy endomorfizmu niediagonalizowalnego. W szczególności, czy istnieje baza przestrzeni wektorowej X, w której macierz endomorfizmu $f : X \to X$ jest macierzą Jordana?

Przykład 9.1. *Rozważmy macierz $J \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ postaci*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$. Macierz J jest macierzą Jordana. Niech e_1, e_2, e_3, e_4 będzie bazą 4–wymiarowej rzeczywistej przestrzeni X oraz niech $f : X \to X$ będzie endomorfizmem wyznaczonym przez macierz J. Z postaci macierzy J otrzymujemy

$$\begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) = e_1 + \lambda e_2 \\ f(e_3) = e_2 + \lambda e_3 \\ f(e_4) = e_3 + \lambda e_4 \end{cases}, \quad \textit{lub równoważnie} \quad \begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) - \lambda e_2 = e_1 \\ f(e_3) - \lambda e_3 = e_2 \\ f(e_4) - \lambda e_4 = e_3 \end{cases}.$$

Z równań tych wynika, że e_1 jest wektorem własnym endomorfizmu f odpowiadającym wartości własnej λ; pozostałe wektory e_2, e_3, e_4 spełniają równania

$$(f - \lambda\,\mathrm{id})(e_{k+1}) = e_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Powyższy przykład sugeruje sposób konstrukcji bazy przestrzeni wektorowej, w której macierz endomorfizmu jest macierzą Jordana.

9.1. Wektory główne

Przy założeniach i oznaczeniach sformułowanych na początku rozdziału, przypuśćmy że $\lambda \in \mathbb{F}$ jest wartością własną endomorfizmu f. Oznacza to, że dla endomorfizmu f istnieje co najmniej jeden wektor własny, który na potrzeby tego rozdziału oznaczymy $v_\lambda^{(1)}$ i będziemy nazywać **wektorem głównym rzędu 1** odpowiadającym wartości własnej λ. Wektory główne rzędu $k \geqslant 2$ zdefiniujemy indukcyjnie: przypuśćmy, że $v_\lambda^{(k-1)} \in X$ jest wektorem głównym rzędu $k-1$ odpowiadającym wartości własnej λ.

Definicja 9.1. *Jeżeli istnieje niezerowy wektor $v_\lambda^{(k)} \in X$ spełniający warunek*

$$(f - \lambda \, \mathrm{id}_X)\, v_\lambda^{(k)} = v_\lambda^{(k-1)}, \tag{9.1}$$

*to wektor ten nazywamy **wektorem głównym rzędu k** odpowiadającym wartości własnej λ.*

Powyższą definicję można również sformułować dla macierzy. Wektor własny $v_\lambda^{(1)} \in \mathbb{F}^n$ macierzy A odpowiadający wartości własnej λ nazywać będziemy wektorem głównym rzędu 1. Przypuśćmy, że $v_\lambda^{(k-1)} \in \mathbb{F}^n$ jest wektorem głównym rzędu $k-1$ odpowiadającym wartości własnej λ.

Definicja 9.2. *Jeżeli istnieje niezerowy wektor $v_\lambda^{(k)} \in \mathbb{F}^n$ będący rozwiązaniem równania*

$$(A - \lambda I)\, v_\lambda^{(k)} = v_\lambda^{(k-1)}, \tag{9.2}$$

*to wektor ten nazywamy **wektorem głównym rzędu k** odpowiadającym wartości własnej λ.*

Przykład 9.2. *Rozważmy macierz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ postaci*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.3}$$

Ponieważ $\varphi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ zatem macierz A ma dwie różne wartości własne: $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = 2$. Wyznaczymy dla tych wartości własnych wektory główne.

- *Dla $\lambda_1 = 1$, rozwiązując równanie*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy: $x = y = 0, z \in \mathbb{R}$; wektor główny rzędy 1 ma więc postać $v_{\lambda_1}^{(1)} = (0, 0, t)\,,\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Aby wyznaczyć wektory główne rzędu 2 rozważmy, dla ustalonego $t \neq 0$, równanie

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

Łatwo stwierdzić, że równanie to nie posiada rozwiązań. Oznacza to, że dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$ nie istnieją wektory główne rzędu $k \geqslant 2$.

- *Dla $\lambda_2 = 2$, rozwiązując równanie*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy: $x = z, y = 0$; *wektor główny rzędy* 1 *ma więc postać* $v_{\lambda_2}^{(1)} = (t, 0, t)\,,\ t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Aby wyznaczyć wektory główne rzędu* 2, *rozważmy, dla ustalonego* $t \neq 0$, *równanie*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

Jego rozwiązaniem jest $x = z, y = t$; *wektor główny rzędu* 2 *ma więc postać* $v_{\lambda_2}^{(2)} = (r, t, r)\,,\ r \in \mathbb{R}$. *Zauważmy, że postać wektora* $v_{\lambda_2}^{(2)}$ *zależy od sposobu wyboru wektora* $v_{\lambda_2}^{(1)}$. *Aby wyznaczyć wektory główne rzędu* 3, *rozważmy, dla ustalonych* $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,,\ r \in \mathbb{R}$, *równanie*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ t \\ r \end{bmatrix}.$$

Łatwo stwierdzić, że równanie to nie posiada rozwiązań, a tym samym nie istnieją dla wartości własnej $\lambda_2 = 2$ *wektory główne rzędu* $k \geqslant 3$.

Podsumowując, dla macierzy A postaci (9.3) udało się wyznaczyć trzy liniowo niezależne wektory główne: jeden odpowiadający wartości własnej λ_1 *oraz dwa odpowiadające wartości własnej* λ_2. *Przyjmując na przykład* $t = r = 1$, *otrzymujemy*

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= (0, 0, 1)\,, \\ v_2^{(1)} &= (1, 0, 1)\,, \\ v_3^{(2)} &= (1, 1, 1)\,. \end{aligned}$$

Ustalając w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ *bazę kanoniczną, macierz A określa endomorfizm* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*:*

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (2x + y, 2y, x + y + z)\,,$$

Wyznaczone powyżej wektory $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}$ *są również bazą przestrzeni* $\mathbb{R}^3$, *a zatem możemy zapytać o postać macierzy endomorfizmu f w tej właśnie bazie. Ponieważ*

$$\begin{aligned} f\left(v_1^{(1)}\right) &= f(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = v_1^{(1)} + 0v_2^{(1)} + 0v_2^{(2)}, \\ f\left(v_2^{(1)}\right) &= f(1, 0, 1) = (2, 0, 2) = 0v_1^{(1)} + 2v_2^{(1)} + 0v_2^{(2)}, \\ f\left(v_2^{(2)}\right) &= f(1, 1, 1) = (3, 2, 3) = 0v_1^{(1)} + v_2^{(1)} + 2v_2^{(2)}, \end{aligned}$$

więc macierz A_f *endomorfizmu f w bazie złożnej z wektorów głównych macierzy A ma postać*

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jest to macierz Jordana macierzy A, którą w zupełnie inny sposób uzyskaliśmy w przykładzie 8.2. Zauważmy również, że dla macierzy $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, *której kolumnami są wektory* $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}$, *tj.*

$$P = \left[v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

mamy

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J.$$

Macierz P jest więc macierzą ustalającą podobieństwo między macierzą A oraz jej macierzą Jordana.

Własności wektorów głównych

Własność 9.1. *Dla każdej wartości własnej istnieją wektory główne rzędu co najmniej 1.*

Własność 9.2. *Wektory główne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.*

Własność 9.3. *Wektory główne różnych rzędów odpowiadające tej samej wartości własnej są liniowo niezależne.*

Własność 9.4. *Dla wartości własnej λ o krotności r (krotności jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego) istnieje dokładnie r liniowo niezależnych wektorów głównych; wśród nich są wszystkie liniowo niezależne wektory własne odpowiadające wartości własnej λ.*

Z powyższych własności wektorów głównych wynika, że **dla dowolnego endomorfizmu $f : X \to X$, który posiada n wartości własnych (liczonych z krotnościami, $n = \dim X$) istnieje baza przestrzeni X złożona z jego wektorów głównych**. Ponadto, z zależności (9.1) wynika, że jeżeli $v_\lambda^{(i)}$ jest wektorem głównym rzędu i ($i = 1, \dots, k$) odpowiadającym wartości własnej λ endomorfizmu f, to

$$\begin{aligned} f\left(v_\lambda^{(1)}\right) &= \lambda v_\lambda^{(1)}, \\ f\left(v_\lambda^{(2)}\right) &= \lambda v_\lambda^{(2)} + v_\lambda^{(1)}, \\ &\vdots \\ f\left(v_\lambda^{(k)}\right) &= \lambda v_\lambda^{(k)} + v_\lambda^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Tym samym endomorfizm f zawężony do przestrzeni liniowej rozpiętej przez wektory $v_\lambda^{(1)}, \dots, v_\lambda^{(k)}$ jest również endomorfizmem, tj.

$$f : \operatorname{span}\left\{v_\lambda^{(1)}, \dots, v_\lambda^{(k)}\right\} \ni x \to f(x) \in \operatorname{span}\left\{v_\lambda^{(1)}, \dots, v_\lambda^{(k)}\right\};$$

jego macierzą w bazie $v_\lambda^{(1)}, \dots, v_\lambda^{(k)}$ jest klatka Jordana stopnia k odpowiadająca wartości własnej λ. Oznacza to, że macierz endomorfizmu f w bazie złożonej z jego wektorów głównych jest macierzą Jordana. Bazę tę nazywamy **bazą Jordana** przestrzeni X względem endomorfizmu f.

Uwaga 9.1. *Czasami macierz Jordana defniuje się jako macierz blokową, której bloki – klatki Jordana to macierze kwadratowe, na przekątnej z wartościami własnymi i jedynkami pod przekątną (a nie nad przekątną, jak w przyjętej przez nas definicji 8.1). Aby uzyskać taką właśnie klatkę Jordana wystarczy wektory główne ponumerować tak, aby ostatni był pierwszym, a pierwszy ostatnim, tj.*

$$w_\lambda^{(i)} = v_\lambda^{(k-i+1)}, \quad \text{dla } i = 1, \dots, k.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} f\left(w_\lambda^{(1)}\right) &= f\left(v_\lambda^{(k)}\right) = \lambda v_\lambda^{(k)} + v_\lambda^{(k-1)} = \lambda w_\lambda^{(1)} + w_\lambda^{(2)}, \\ f\left(w_\lambda^{(2)}\right) &= f\left(v_\lambda^{(k-1)}\right) = \lambda v_\lambda^{(k-1)} + v_\lambda^{(k-2)} = \lambda w_\lambda^{(2)} + w_\lambda^{(3)}, \\ &\vdots \\ f\left(w_\lambda^{(k)}\right) &= f\left(v_\lambda^{(1)}\right) = \lambda v_\lambda^{(1)} = \lambda w_\lambda^{(k)} \end{aligned}$$

zatem klatka Jordana ma w tym przypadku postać:

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

9.2. Macierz przejścia

Niech X będzie n–wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech $e = (e_1, \ldots, e_n)$ oraz $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ będą dwiema bazami przestrzeni X. Każdy wektor bazy $\tilde{e}$ możemy wyrazić jako kombinację liniową wektorów bazy e:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \ldots + p_{n1}e_n, \\ \tilde{e}_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \ldots + p_{n2}e_n, \\ &\vdots \\ \tilde{e}_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \ldots + p_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Otrzymaną w ten sposób macierz współczynników $P = [p_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ nazywamy **macierzą przejścia** ze *starej* bazy e do *nowej* bazy $\tilde{e}$. Zanotujmy, że i–tą kolumnę macierzy przejścia tworzą współrzędne i–tego wektora nowej bazy jako kombinacji liniowej wektorów starej bazy. Macierz przejścia jest więc macierzą endomorfizmu

$$\mathrm{id}_X : \mathrm{span}\left\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\right\} \ni x \to x \in \mathrm{span}\left\{e_1, \ldots, e_n\right\}.$$

Dowolny element $x \in X$ możemy wyrazić jako kombinację liniową elementów bazy e, jak również bazy $\tilde{e}$. Poszukamy teraz zależności między tymi reprezentacjami. Mamy

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \quad \text{oraz} \quad x = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \tilde{e}_j. \tag{9.4}$$

Wykorzystując macierz przejścia mamy:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\tilde{\alpha}_j\right) e_i.$$

Stąd oraz z postaci rozwinięcia wektora x względem bazy e wynika zależność między współrzędnymi wektora względem starej oraz nowej bazy:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \ddots & & p_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_n \end{bmatrix}. \tag{9.5}$$

Zależność tę możemy ująć krótko:

$$\alpha = P\tilde{\alpha}, \tag{9.6}$$

gdzie α (odpowiednio $\tilde{\alpha}$) to wektor współrzędnych x względem starej (nowej) bazy, a P to macierz przejścia z pierwszej bazy do drugiej. Zauważmy również, że z równania (9.6) wynika:

$$\tilde{\alpha} = P^{-1}\alpha,$$

co oznacza, że macierzą przejścia z bazy nowej to starej jest macierz P^{-1}.

Przykład 9.3. *Rozważmy w $\mathbb{R}^2$ dwie bazy: starą $e_1 = (1,2), e_2 = (0,1)$ oraz nową $\tilde{e}_1 = (1,1)$, $\tilde{e}_2 = (-1,1)$. Wyznaczymy macierz przejścia z bazy starej do nowej. Mamy*

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 = (1,1) = p_{11}(1,2) + p_{21}(0,1) = (p_{11}, 2p_{11} + p_{21}) \\ \tilde{e}_2 = (-1,1) = p_{12}(1,2) + p_{22}(0,1) = (p_{12}, 2p_{12} + p_{22}) \end{aligned}$$

skąd wynika, że: $p_{11} = 1, p_{21} = -1, p_{12} = -1, p_{22} = 3$. Macierz przejścia ma więc postać:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Niech teraz $(2,1)$ będzie wektorem wyrażonym w starej bazie. Wyznaczymy jego współrzędne w nowej bazie. Mamy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Aby sprawdzić poprawność wyniku przedstawimy obydwa wektory w tej samej bazie kanonicznej k: $k_1 = (1,0), k_2 = (0,1)$:

$$\begin{aligned} (2,1)_e = 2e_1 + e_2 = 2(1,2) + (0,1) = (2,5)_k \\ (7/2, 3/2)_{\tilde{e}} = \frac{7}{2}\tilde{e}_1 + \frac{3}{2}\tilde{e}_2 = \frac{7}{2}(1,1) + \frac{3}{2}(-1,1) = (2,5)_k. \end{aligned}$$

9.3. Zmiana bazy, a postać macierzy odwzorowania liniowego

Na zakończenie tego rozdziału zbadamy jak zmienia się macierz odwzorowania liniowego wraz ze zmianą baz przestrzeni między którymi to odwzorowanie jest określone.

Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym oraz niech $\dim X = n$, $\dim Y = m$. Przyjmując w przestrzeni X bazę $e = (e_1, \ldots, e_n)$, a w przestrzeni Y bazę $g = (g_1, \ldots, g_m)$, odwzorowanie f reprezentowane jest przez macierz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, tj.

$$y = Ax. \tag{9.7}$$

Ustalając w przestrzeni X nową bazę $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ możemy wyznaczyć macierz przejścia z bazy e do bazy $\tilde{e}$; oznaczmy ją przez P. Oczywiście $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Podobnie, dokonując zmiana bazy w przestrzeni Y z g na $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_m)$ możemy wyznaczyć macierz przejścia $Q \in \mathbb{F}^{m \times m}$ z bazy g do $\tilde{g}$. Niech $\tilde{x}$ (odpowiednio $\tilde{y}$) będą współrzędnymi wektorów x (odp. y) w nowych bazach przestrzeni X i Y. Otrzymujemy

$$x = P\tilde{x} \quad \text{oraz} \quad y = Q\tilde{y}.$$

Łącząc powyższe zależności z równaniem (9.7) mamy

$$Q\tilde{y} = AP\tilde{x},$$

lub równoważnie

$$\tilde{y} = Q^{-1}AP\tilde{x}.$$

Oznacza to, że w nowych bazach przestrzeni X oraz Y odwzorowanie f reprezentowane jest przez macierz $Q^{-1}AP$. W szczególności, **jeżeli $f : X \to X$ jest endomorfizmem reprezentowanym przez macierz A wyznaczoną w bazie e przestrzeni X, to macierzą tego endomorfizmu w bazie $\tilde{e}$ jest macierz $P^{-1}AP$, gdzie P jest macierzą przejścia z baze e do bazy $\tilde{e}$.**

9.3.1. Baza złożona z wektorów własnych

Rozważmy endomorfizm $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, gdzie $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$; przestrzeń wektorową $\mathbb{F}^n$ rozważamy nad ciałem $\mathbb{F}$. Przypuśćmy, że endomorfizm f jest diagonalizowalny. Oznacza to, że istnieje baza v przestrzeni $\mathbb{F}^n$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu f. Niech A będzie macierzą tego endomorfizmu w wybranej bazie przestrzeni $\mathbb{F}^n$. Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli P jest macierzą przejścia z wybranej bazy przestrzeni $\mathbb{F}^n$ do bazy v, to w tej nowej bazie endomorfizm f jest reprezentowany przez macierz diagonalną $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, gdzie λ_i jest wartością własną endomorfizmu f odpowiadającą wektorowi własnemu v_i $(i = 1, \ldots, n)$. Macierzą ustalającą podobieństwo między macierzami A oraz $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ jest macierz P, tzn.

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Ponieważ i–tą kolumną macierzy P są współrzędne i–tego wektora bazy v względem starej bazy przestrzeni $\mathbb{F}^n$, zatem wybierając jako tę starą bazę bazę kanoniczną, i–tą kolumną macierzy P są współrzędne i–tego wektora własnego endomorfizmu f, tzn. $P = [v_1, \ldots, v_n]$ (zob. przykład 7.5).

9.3.2. Baza Jordana

Jeżeli endomorfizm $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ nie jest diagonalizowalny to nie istnieje baza przestrzeni $\mathbb{F}^n$ złożona z jego wektorów własnych. Zawsze możemy natomiast wyznaczyć bazę przestrzeni $\mathbb{F}^n$ złożoną z jego wektorów głównych. Oznaczmy tę bazę przez v. Wiemy, że w bazie tej macierz endomorfizmu f ma postać Jordana. Jeżeli A jest macierzą ednomorfizmu f w innej bazie, a P jest macierzą przejścia z tej bazy do bazy złożonej z wektorów głównych, to wówczas

$$P^{-1}AP = J,$$

gdzie J jest macierzą Jordana endomorfizmu f. Wybierając jako tę starą bazę bazę kanoniczną, i–tą kolumną macierzy P są współrzędne i–tego wektora głównego endomorfizmu f (zob. przykład 9.2).

Na zakończenie rozważmy następujący

Przykład 9.4. *Niech $D : \pi_3 \to \pi_3$ będzie endomorfizmem określonym wzorem*

$$D(f) = f'.$$

Wybierając w przestrzeni π_3 bazę $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$, $e_4 = x^3$, otrzymujemy:

$$D(e_1) = 0, \ D(e_2) = e_1, \ D(e_3) = 2e_2, \ D(e_4) = 3e_3.$$

W bazie e_1, e_2, e_3, e_4 przestrzeni π_3 macierz A endomorfizmu D ma więc postać

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\varphi_A(\lambda) = \lambda^4$ zatem $\lambda_0 = 0$ jest jedyną wartością własną macierzy A (endomorfizmu D). Ponieważ

$$\dim\ker(A - \lambda_0 I) = \dim\ker A = 4 - \operatorname{rank} A = 1,$$

zatem dla macierzy A istnieje tylko jeden liniowo niezależny wektor własny postaci $(t,0,0,0)$. Macierz A nie jest więc diagonalizowalna. Wyznaczymy jej wektory główne. Dla ustalonego $t \neq 0$, mamy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika: $x = r, y = t,\ z = w = 0$, gdzie $r \in \mathbb{R}$. Tym samym $v^{(2)} = (r,t,0,0)$ jest wektorem głównym rzędy 2. Podobnie, dla ustalonych $t \neq 0$ oraz $r \in \mathbb{R}$, mamy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika: $x = s, y = r, z = \frac{1}{2}t, w = 0$, gdzie $s \in \mathbb{R}$. Tym samym $v^{(3)} = \left(s, r, \frac{1}{2}t, 0\right)$ jest wektorem głównym rzędy 3. Musimy wyznaczyć jeszcze wektor główny rzędu 4. Mamy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ r \\ \frac{1}{2}t \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że $x = p, y = s, z = \frac{1}{2}r, w = \frac{1}{6}t$, gdzie $t \neq 0$ oraz $p, s, r \in \mathbb{R}$. Ustalając $p = s = 1$, $r = 2, t = 6$ otrzymujemy cztery liniowo niezależne wektory główne macierzy A

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= (6,0,0,0)\,, \\ v^{(2)} &= (2,6,0,0)\,, \\ v^{(3)} &= (1,2,3,0)\,, \\ v^{(4)} &= (1,1,1,1)\,. \end{aligned}$$

Odpowiadają one czterem wektorom głównym endomorfizmu D:

$$v_1(x) = 6,\ \ v_2(x) = 2 + 6x,\ \ v_3(x) = 1 + 2x + 3x^2,\ \ v_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3.$$

Łatwo stwierdzić, że macierz

$$P = \left[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}\right] = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest macierzą przejścia z bazy e_1, e_2, e_3, e_4 do bazy złożonej z wektorów głównych endomorfizmu D. Faktycznie,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J.$$

Macierz Jordana J jest macierzą endomorfizmu D w bazie złożonej z jego wektorów głównych.