Rozdział 10

Formy kwadratowe

Rozważmy rzeczywistą macierz symetryczną $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Definicja 10.1. *Funkcję $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ postaci*

$$h(x) = x^T A x \tag{10.1}$$

nazywamy **formą kwadratową**. *Macierz symetryczną A występującą w powyższym równaniu nazywamy macierzą formy kwadratowej h.*

Uwaga 10.1. *Zauważmy, że wyrażenie $x^T Ax$ ma sens również w przypadku dowolnej kwadratowej macierzy niesymetrycznej. Okazuje się jednak, że formę kwadratową zdefiniowaną przez dowolną macierz niesymetryczną zawsze można równoważnie zdefiniować przez macierz symetryczną. Faktycznie,*

$$x^T Ax = x^T \left(\frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} \right) x = x^T \frac{A + A^T}{2} x + x^T \frac{A - A^T}{2} x,$$

ale

$$x^T \frac{A - A^T}{2} x = \frac{1}{2} \left(x^T Ax - x^T A^T x \right) = \frac{1}{2} \left(x^T Ax - \left(x^T A^T x \right)^T \right) = \frac{1}{2} \left(x^T Ax - x^T Ax \right) = 0,$$

zatem

$$x^T Ax = x^T \frac{A + A^T}{2} x.$$

Macierz $\frac{A+A^T}{2}$ jest już macierzą symetryczną.

Przyjmując $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, wzór (10.1) możemy równoważnie wyrazić w postaci

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Przykład 10.1. *Odwzorowania*

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$$

oraz

$$h_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$$

są formami kwadratowymi o macierzach

$$A_{h_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad A_{h_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odwzorowania

$$g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2 \quad \text{oraz} \quad g_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1$$

nie są formami kwadratowymi.

10.1. Określoność formy kwadratowej

W klasie wszystkich form kwadratowych szczególną rolę odgrywają formy określone.

Definicja 10.2. *Formę kwadratową* $h(x) = x^T Ax$ *nazywamy*

- *dodatnio określoną, jeżeli*
$$x^T Ax > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$$
- *ujemnie określoną, jeżeli*
$$x^T Ax < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$$
- *dodatnio półokreśloną, jeżeli*
$$x^T Ax \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$
- *ujemnie półokreśloną, jeżeli*
$$x^T Ax \leqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$
- *nieokreśloną, jeżeli nie zachodzi żaden z powyższych warunków.*

Przykład 10.2. *Rozważmy ponownie formę kwadratową*

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3.$$

Ponieważ $h_1(1, 0, 0) = -1$ *oraz* $h_1(0, 1, 0) = 1$, *zatem forma kwadratowa* h_1 *jest nieokreślona. Forma kwadratowa*

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

jest dodatnio określona; z kolei forma

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2$$

jest półokreślona dodatnio (dlaczego?).

10.2. Metody badania określoności formy kwadratowej

Poniżej przedstawione zostaną (bez dowodów) najczęściej stosowane metody badania określoności form kwadratowych.

10.2.1. Kryterium Sylvestera

Twierdzenie 10.1. *Forma kwadratowa $h(x) = x^T Ax$, gdzie $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jest:*

– *dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory wiodące macierzy A są dodatnie:*

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad (j = 1, \ldots, n);$$

– *ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(-1)^j D_j = (-1)^j \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Przykład 10.3. *Dla formy kwadratowej*

$$h(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_3^2$$

mamy:

$$h(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$D_1 = 3 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

zatem forma kwadratowa h jest dodatnio określona.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że z warunków $D_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ nie wynika dodatnia półokreśloność formy kwadratowej $h(x) = x^T Ax$.

Przykład 10.4. *Dla formy kwadratowej*

$$h(x_1, x_2) = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -x_2^2$$

mamy $D_1 \geqslant 0$ oraz $D_2 \geqslant 0$, podczas gdy forma kwadratowa h jest ujemnie półokreślona.

Twierdzenie 10.2. *Forma kwadratowa $h(x) = x^T Ax$, gdzie $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jest:*

– *dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy A są nieujemne, tj.*

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_p} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i_pi_1} & a_{i_pi_2} & \cdots & a_{i_pi_p} \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

dla $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$, $1 \leqslant p \leqslant n$;

– *ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(-1)^p \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_p} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p i_1} & a_{i_p i_2} & \cdots & a_{i_p i_p} \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

dla $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$, $1 \leqslant p \leqslant n$.

Przykład 10.5. *Dla formy kwadratowej*

$$h(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

mamy

- *trzy minory główne stopnia jeden:* $a_{11} = -1$, $a_{22} = -2$, $a_{33} = -2$;
- *trzy minory główne stopnia dwa:*

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0;$$

- *jeden minor główny stopnia trzy:*

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Z twierdzenia 11.2 wynika, że forma kwadratowa h jest ujemnie półokreślona.

10.2.2. Kryterium wartości własnych

Można udowodnić, że rzeczywista macierz symetryczna A ma rzeczywiste wartości własne. Niech $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ będzie wektorem własnym macierzy A odpowiadającym jej wartości własnej $\lambda(A)$ oraz przypuśćmy, że forma kwadratowa $h(x) = x^T Ax$ jest dodatnio określona. Wówczas

$$0 < v^T Av = v^T \lambda(A) v = \lambda(A) v^T v = \lambda(A) \sum_{i=1}^{n} v_i^2, \tag{10.2}$$

a stąd $\lambda(A) > 0$. Oznacza to, że jeżeli forma kwadratowa jest dodatnio określona to jej macierz ma dodatnie wartości własne. Łatwo o podobne zależności dla form określonych ujemnie oraz półokreślonych.

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 10.3. *Niech* $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ *będą wartościami własnymi macierzy* $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Wówczas forma kwadratowa* $h(x) = x^T Ax$ *jest*

– *dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda_i(A) > 0 \quad (i = 1, \ldots, n);$$

– *ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda_i(A) < 0 \quad (i = 1, \ldots, n);$$

– *dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda_i(A) \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n);$$

– *ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda_i(A) \leqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Przykład 10.6. *Rozważmy formę kwadratową h z przykładu 11.5:*

$$h(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{10.3}$$

Jej macierz ma trzy rzeczywiste wartości własne $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$. Z twierdzenia 11.3 wynika, że forma kwadratowa (10.3) jest ujemnie półokreślona.

10.2.3. Sprowadzenie do postaci kanonicznej (metoda Lagrange'a)

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 10.4. *Dla każdej macierzy symetrycznej $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ istnieje macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dla której macierz $P^T AP$ jest diagonalna. Innymi słowy, dla każdej formy kwadratowej*

$$h(x) = x^T Ax$$

istnieje nieosobliwe przekształcenie liniowe $x = Py$, dla którego forma kwadratowa $h(Py) = y^T P^T APy$ przyjmuje postać kanoniczną, tj.

$$h(Py) = c_1 y_1^2 + \ldots + c_n y_n^2, \tag{10.4}$$

dla pewnych skalarów $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Zauważmy, że forma kwadratowa zapisana w postaci kanonicznej (10.4) jest:

- dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$;
- ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$;
- dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$;
- ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Metoda Lagrange'a Formę kwadratową

$$h(x) = x^T Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

możemy zapisać w postaci

$$h(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n).$$

Rozważmy trzy przypadki:

- $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Wówczas $h(x) \equiv 0$, tzn. forma kwadratowa jest jednocześnie ujemnie oraz dodatnio półokreślona;

- $a_{ii} = 0$ dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, n\}$ oraz istnieją indeksy k, l dla których $a_{kl} \neq 0$. Niech e_k oraz e_l będą odpowiednio k-tym oraz l-tym wektorem bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech $v^+ = e_k + e_l$ oraz $v^- = e_k - e_l$. Wówczas

$$h\left(v^+\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i^+ v_j^+ = 2a_{kl}$$
$$h\left(v^-\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i^- v_j^- = -2a_{kl}$$

  skąd wynika, że w rozważanym przypadku forma kwadratowa h jest nieokreślona;
- $a_{ii} \neq 0$ dla pewnego indeksu i; bez straty ogólności możemy przyjąć, że $i = 1$. Wówczas

$$\begin{aligned} h\left(x_1, \ldots, x_n\right) &= a_{11} x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j \\ &= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j\right) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j \\ &= a_{11}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j\right)^2 - a_{11}\left(\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j. \end{aligned}$$

  Do formy kwadratowej h możemy teraz zastosować zamianę zmiennych:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases} \quad \text{lub równoważnie} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} y_j \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases}. \tag{10.5}$$

  Równania (10.5) określają nieosobliwe przekształcenie liniowe postaci $x = Py$, gdzie

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  W wyniku zamiany zmiennych (10.5) otrzymujemy

$$h(x) = h(Py) = a_{11} y_1^2 + \tilde{h}\left(y_2, \ldots, y_n\right),$$

  gdzie $\tilde{h}$ jest formą kwadratową zmiennych $y_2, \ldots, y_n$, do której ponownie stosujemy przedstawione rozumowanie rugując systematycznie kolejne zmienne i sprowadzając ją do postaci kanonicznej (lub wcześniej stwierdzając jej nieokreśloność).

Przykład 10.7. *Rozważmy formę kwadratową*

$$h(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3.$$

Stosując opisaną powyżej metodę Lagrange'a sprowadzimy ją do postaci kanonicznej. Mamy:

$$\begin{aligned}
h(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3 \\
&= -\left(x_1^2 - 2x_1x_2\right) + x_2^2 - 4x_2x_3 \\
&= -(x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 \\
&= -(x_1 - x_2)^2 + 2\left(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2\right) - 2x_3^2 \\
&= -(x_1 - x_2)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 - 2x_3^2.
\end{aligned}$$

Rozważana forma kwadratowa jest więc nieokreślona. Zauważmy ponadto, że dokonując zamiany zmiennych

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \\ \qquad x_3 = y_3 \end{cases} \quad \textit{lub równoważnie} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases},$$

która jest przekształceniem liniowym $x = Py$ o macierzy P postaci

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
h(x_1, x_2, x_3) &= [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= [y_1 \;\; y_2 \;\; y_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\
&= [y_1 \;\; y_2 \;\; y_3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = -y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2.
\end{aligned}$$

Jest to postać kanoniczna rozważanej formy kwadratowej ($c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -2$).