Rozdział 12

Elementy geometrii analitycznej w $\mathbb{R}^3$

Elementy trójwymiarowej przestrzeni rzeczywistej $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ możemy interpretować co najmniej na trzy sposoby:

- jako zbiór punktów (x, y, z) (wykres 4a)); będziemy je oznaczać dużymi literami A, B, C itd. Liczby rzeczywiste x, y, z nazywamy współrzędnymi punktu $A = (x, y, z)$. Punkt nie jest wielkością wektorową – nie ma zwrotu, kierunku, długości.
- jako zbiór wszystkich wektorów zaczepionych $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{v}$ itd. (wykres 4b)). Wektory te mają wspólny początek w punkcie $O = (0, 0, 0)$. Każdy punkt $P = (x, y, z)$ wyznacza dokładnie jeden wektor zaczepiony $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.
- jako zbiór wszystkich wektorów swobodnych $\overrightarrow{u}$, przy czym przez wektor swobodny $\overrightarrow{u}$ rozumiemy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych w dowolnym punkcie, które mają tę samą długość, ten sam zwrot oraz ten sam kierunek co wektor $\overrightarrow{u}$ (wykres 4c)). Każde dwa różne punkty $A = (x_a, y_a, z_a)$ oraz $B = (x_b, y_b, z_b)$ wyznaczają dwa wektory swobodne

  $$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a) \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{BA} = (x_a - x_b, y_a - y_b, z_a - z_b)\,;$$

  wektor $\overrightarrow{BA}$ nazywamy wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{AB}$. Punkt A (odpowiednio B) nazywamy początkiem (końcem) wektora $\overrightarrow{AB}$. Początek (koniec) danego wektora jest końcem (początkiem) wektora do niego przeciwnego.

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$ będą dowolnymi wektorami oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wprowadzamy dwa naturalne działania: sumę wektorów

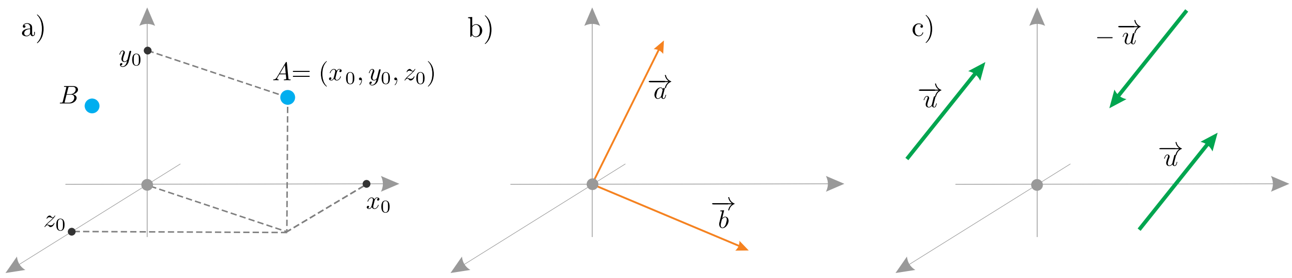
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \overset{df}{=} (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v)$$

oraz mnożenie wektora przez skalar:

$$\alpha \cdot \overrightarrow{u} \overset{df}{=} (\alpha x_u, \alpha y_u, \alpha z_u)\,.$$

Długość wektora $\overrightarrow{u}$ określamy wzorem:

$$\|\overrightarrow{u}\| \overset{df}{=} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}.$$



Wykres 4. Punkty, wektory zaczepione, wektory swobodne.

12.1. Iloczyny wektorów: skalarny, wektorowy, mieszany

12.1.1. Iloczyn skalarny

Rozważmy dwa wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 12.1 (iloczyn skalarny). *Iloczyn skalarny wektorów $\vec{u}$ oraz $\vec{v}$ to liczba (skalar) $\vec{u} \circ \vec{v}$ określona wzorem*

$$\vec{u} \circ \vec{v} \stackrel{df}{=} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}), \tag{12.1}$$

gdzie $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ to kąt między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$; zakładamy, że $0 \leqslant \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) \leqslant \pi$.

Można wykazać, że jeżeli $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ to

$$\vec{u} \circ \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v. \tag{12.2}$$

Ze wzorów (12.1) oraz (12.2) wynika, że kąt między niezerowymi wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$ wyraża się wzorem

$$\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \cdot \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}.$$

Własności iloczynu skalarnego

Dla dowolnych $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi

a) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$;
b) $\vec{u} \circ \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$;
c) $(\alpha \cdot \vec{u}) \circ \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \circ \vec{v})$;
d) $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) + (\vec{v} \circ \vec{w})$;
e) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ (nierówność Schwarza);
f) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = 0$ (warunek ortogonalności wektorów).

Ćwiczenie Uzasadnić powyższe własności iloczynu skalarnego.

Układ współrzędnych

Układem współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywamy trzy ustalone wzajemnie prostopadłe proste, przecinające się w jednym punkcie zwanym początkiem układu współrzędnych. Zwyczajowo proste te oznacza się Ox, Oy oraz Oz i nazywa się osiami układu współrzędnych $Oxyz$. Początkiem układu współrzędnych jest zazwyczaj punkt $(0, 0, 0)$. Geometria analityczna to geometria *uprawiana* w wybranym układzie współrzędnych.

12.1.2. Iloczyn wektorowy

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$ będą dowolnymi wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 12.2 (iloczyn wektorowy). *Iloczynem wektorowym wektorów $\overrightarrow{u}$ oraz $\overrightarrow{v}$ nazywamy wektor*

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u)\,. \tag{12.3}$$

Łatwo sprawdzić przez bezpośredni rachunek, że wzór (12.3) można wyrazić w postaci symbolicznego wyznacznika

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

gdzie $\overrightarrow{i} = (1,0,0)\,,\ \overrightarrow{j} = (0,1,0)\,,\ \overrightarrow{k} = (0,0,1)\,.$ Można również wykazać, że

$$\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \sin\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

gdzie, podobnie jak poprzednio, $\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ to kąt między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ $(0 \leqslant \measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leqslant \pi)$.

Własności iloczynu wektorowego

Dla dowolnych $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi

a) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$;
b) $(\alpha \cdot \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\alpha \cdot \overrightarrow{v}) = \alpha \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$;
c) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$;
d) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$;
e) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \{\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{u} = 0 \vee \overrightarrow{v} = 0\}$ (warunek równoległości wektorów);
f) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{v}$.

Ćwiczenie Uzasadnić powyższe własności iloczynu wektorowego.

Przykład 12.1. *Rozważmy trzy punkty*

$$A = (0,1,0)\,, \quad B = (1,0,1)\,, \quad C = (1,1,1)$$

będące wierzchołkami pewnego trójkąta. Obliczymy jego pole.

Zauważmy, że dwoma bokami trójkąt o wierzchołkach A, B, C są wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{AC}$; jego pole P wyraża się więc wzorem

$$P = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \sin\measuredangle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

Ponieważ

$$\overrightarrow{AB} = (1,-1,1)\,, \quad \overrightarrow{AC} = (1,0,1)\,,$$

zatem

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} = (-1,0,1)$$

i ostatecznie $P = \frac{\|(-1,0,1)\|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Orientacja układu współrzędnych

Rozróżniamy dwie orientacje układu współrzędnych $Oxyz$ – orientację dodatnią (układ prawoskrętny) oraz ujemną (układ lewoskrętny). Orientacja układu zależy od wzajemnego położenia osi układu Ox, Oy oraz Oz. Jeżeli wyprostowany kciuk prawej ręki umieścimy w ten sposób, aby wskazywał dodatnią część osi Oz, a zgięte palce wskażą kierunek obrotu od osi Ox do osi Oy (odpowiednio: od osi Oy do osi Ox) to wówczas mamy do czynienia z układem prawoskrętnym (lewoskrętnym).

Wykres 5. Orientacja układu współrzędnych: a) układ lewoskrętny, b) układ prawoskrętny.

Iloczyn wektorowy $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ dwóch niezerowych, niewspółliniowych wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma tę własność, że orientacja trójki wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych $Oxyz$.

12.1.3. Iloczyn mieszany

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\overrightarrow{w} = (x_w, y_w, z_w)$ będą dowolnymi elementami przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 12.3 (iloczyn mieszany). *Iloczynem mieszanym uporządkowanej trójki wektorów* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ *nazywamy liczbę* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *określoną wzorem*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \overset{df}{=} (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}. \tag{12.4}$$

Łatwo wykazać, że iloczyn mieszany wektorów jest wyznacznikiem macierzy, której wiersze (lub kolumny) są współrzędnymi tych wektorów, tj.:

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}. \tag{12.5}$$

Własności iloczynu mieszanego

Dla dowolnych $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi:

a) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$;
b) $\alpha \cdot (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\alpha \cdot \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \alpha \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \alpha \cdot \overrightarrow{w})$;
c) $(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$;
d) $|(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\|$.

Ćwiczenie Uzasadnić powyższe własności iloczynu mieszanego.

12.1.4. Zastosowanie geometryczne iloczynu wektorowego oraz mieszanego

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\overrightarrow{w} = (x_w, y_w, z_w)$. Iloczyny wektorowy oraz mieszany mają liczne interesujące zastosowania geometryczne. Można przy ich pomocy wyznaczać między innymi:

✓ **pole równoległoboku:** pole P_r równoległoboku rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ wyraża się wzorem (zob. wykres 6a))

$$P_r = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|\,; \tag{12.6}$$

✓ **pole trójkąta:** pole P_t trójkąta rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ wyraża się wzorem

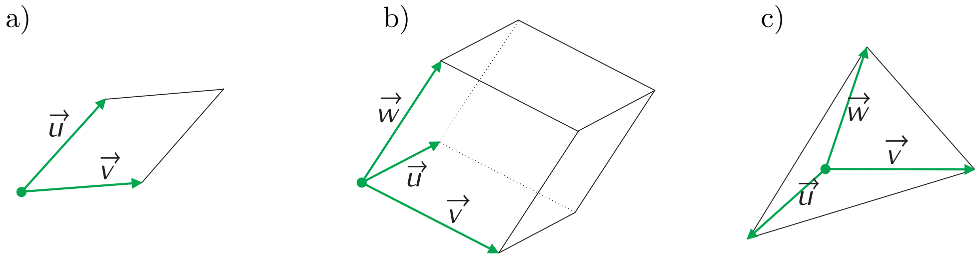
$$P_t = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|\,; \tag{12.7}$$

✓ **objętość równoległościanu:** objętość V_r równoległościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ wyraża się wzorem (zob. wykres 6b))

$$V_r = |(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|\,; \tag{12.8}$$

✓ **objętość czworościanu:** objętość V_c czworościanu wyznaczonego przez wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ wyraża się wzorem (zob. wykres 6c))

$$V_c = \frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|\,. \tag{12.9}$$



Wykres 6. Zastosowanie iloczynów wektorów: a) wektorowego; b) i c) mieszanego

Przykład 12.2. *W celu uzasadnienia wzoru (12.8) zauważmy, że*

$$\cos\measuredangle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{h}{\|\overrightarrow{w}\|},$$

gdzie h to długość wysokości poprowadzonej do podstawy rozpiętej przez wektory $\overrightarrow{u}$ oraz $\overrightarrow{v}$. Stąd, objętość V_r równoległościanu rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ to

$$V_r = P_p \cdot h = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\| \cdot \cos\measuredangle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\,.$$

Zauważmy, że w ten sam sposób uzasadniamy wzór (12.9): objętość V_c czworościanu rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ to

$$V_c = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h = \frac{1}{6} \cdot \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \cdot h = \frac{1}{6} \cdot \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\| \cdot \cos\measuredangle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = \frac{1}{6} \cdot (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\,.$$

Przykład 12.3. *Aby obliczyć długość h wysokości trójkąta o wierzchołkach w punktach*

$$A = (1,1,1), \quad B = (2,2,2), \quad C = (3,4,5)$$

opuszczonej z wierzchołka C, możemy zastosować wzór (12.7). Mamy $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{AC} = (2,3,4)$ *oraz*

$$P = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \cdot h.$$

Ponieważ

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (1,-2,1)$$

zatem

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

Przykład 12.4. *Aby obliczyć długość h wysokości czworościanu o wierzchołkach*

$$A = (0,0,0), \quad B = (1,0,0), \quad C = (0,2,3), \quad D = (3,4,5)$$

opuszczonej z wierzchołka D, zastosujemy wzór (12.9). Mamy

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{3} h \cdot P_{\triangle ABC},$$

gdzie $P_{\triangle ABC}$ to pole trójkąta o wierzchołkach w punktach A, B, C. Mamy

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,0), \quad \overrightarrow{AC} = (0,2,3), \quad \overrightarrow{AD} = (3,4,5).$$

Zatem

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0,-3,2).$$

Stąd oraz ze wzoru (12.7) wynika, że $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\|(0,-3,2)\| = \frac{\sqrt{13}}{2}$. *Ponieważ*

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -2,$$

zatem ostatecznie otrzymujemy

$$h = \frac{1}{2}\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|}{P_{\triangle ABC}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

12.2. Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

12.2.1. Równanie normalne płaszczyzny

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ oraz prostopadłej do niezerowego wektora $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ ma postać

$$\pi : \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{12.10}$$

Jest to tzw. **równanie normalne** płaszczyzny; wektor $\overrightarrow{n}$ jest jej wektorem normalnym.

Łatwo stwierdzić, że równanie

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, również opisuje płaszczyznę – jej wektorem normalnym jest wektor $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ i przechodzi ona przez punkty $P_1 = \left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$, $P_2 = \left(0, -\frac{D}{B}, 0\right)$, $P_3 = \left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$ (o ile oczywiście $ABC \neq 0$).

12.2.2. Równanie odcinkowe płaszczyzny

Równanie postaci

$$\pi : \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{12.11}$$

w którym $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nazywamy **równaniem odcinkowym** płaszczyzny π. Płaszczyzna opisana równaniem (12.11) przecina osie Ox, Oy oraz Oz układu współrzędnych $Oxyz$ w punktach równych odpowiednio $P_x = (a, 0, 0)$, $P_y = (0, b, 0)$, $P_z = (0, 0, c)$.

12.2.3. Równanie parametryczne płaszczyzny

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do dwóch niewspółliniowych (nieleżących na jednej prostej) wektorów $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\overrightarrow{w} = (x_w, y_w, z_w)$ ma postać:

$$\pi : \qquad \begin{cases} x = x_0 + r x_v + s x_w \\ y = y_0 + r y_v + s y_w \\ z = z_0 + r z_v + s z_w \end{cases}, \qquad \text{gdzie } r, s \in \mathbb{R}.$$

Jest to tzw. **równanie parametryczne** płaszczyzny.

12.2.4. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty

Każde trzy niewspółliniowe punkty P_1, P_2, P_3 wyznaczają dokładnie jedną płaszczyznę π, która je zawiera. Niech $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Punkt $P = (x, y, z)$ leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty P_1, P_2, P_3 wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ oraz $\overrightarrow{P_1P_3}$ są liniowo zależne. **Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$**, można więc wyrazić w postaci:

$$\pi : \qquad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{12.12}$$

12.3. Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

12.3.1. Równanie parametryczne prostej

Rozważmy dowolny punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ oraz niezerowy wektor $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$. Równanie

$$l: \quad \begin{cases} x = x_0 + tx_v \\ y = y_0 + ty_v \\ z = z_0 + tz_v \end{cases}, \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R} \tag{12.13}$$

jest **równaniem prostej l przechodzącej przez punkt P i równoległej do wektora $\overrightarrow{v}$**.

12.3.2. Równanie kierunkowe prostej

Przypuśćmy, że prosta l jest zapisana w postaci parametrycznej (12.13) oraz załóżmy, że żadna ze współrzędnych wektora $\overrightarrow{v}$ nie jest zerem. Wyliczając z każdego z trzech równań układu (12.13) parametr t, otrzymujemy **równanie kierunkowe** prostej:

$$l: \quad \frac{x - x_0}{x_v} = \frac{y - y_0}{y_v} = \frac{z - z_0}{z_v}. \tag{12.14}$$

12.3.3. Równanie krawędziowe prostej

Rozważmy dwie nierównoległe płaszczyzny

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{oraz} \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Częścią wspólną tych płaszczyzn jest prosta

$$l: \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}; \tag{12.15}$$

równanie (12.15) to jej **równanie krawędziowe**.

Zauważmy, że płaszczyzny π_1 oraz π_2 nie są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich wektory normalne $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ i $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ nie są równoległe, tj. $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} \neq \overrightarrow{0}$. Wektor $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ jest jednocześnie wektorem kierunkowym (równoległym) prostej l.

12.4. Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

12.4.1. Kąt między płaszczyznami oraz prostymi

Przyjmuje się, że kąt między dwiema prostymi (dwiema płaszczyznami) to kąt jaki tworzą wektory kierunkowe tych prostych (wektory normalne płaszczyzn). Kąt między prostą i płaszczyzną, to kąt $\frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α to kąt ostry jaki tworzą wektor kierunkowy prostej oraz wektor normalny płaszczyzny. Znając wektory normalne płaszczyzn oraz wektory kierunkowe prostych, szukane kąty można łatwo wyliczyć wykorzystując stosowne własności iloczynu skalarnego lub iloczynu wektorowego tych wektorów.

12.4.2. Odległość punktu od płaszczyzny

Łatwo wykazać, że odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ wyraża się wzorem

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{12.16}$$

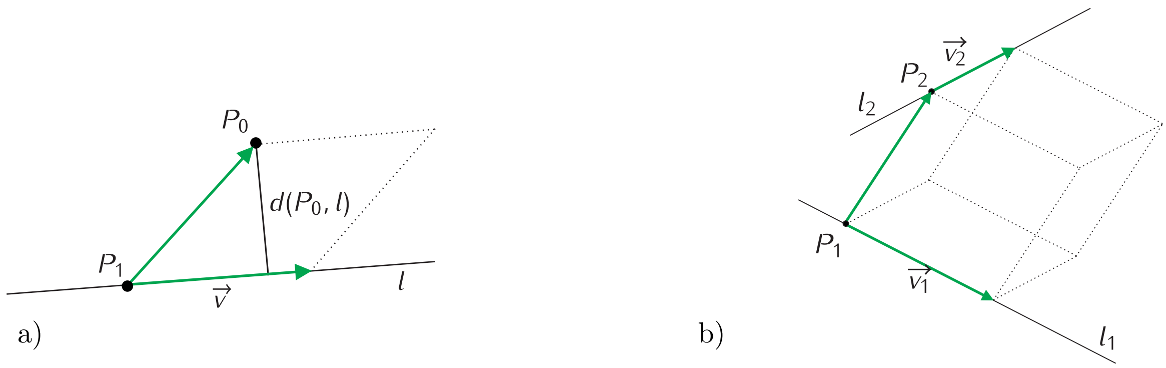
Ćwiczenie Uzasadnić powyższy wzór.

12.4.3. Odległość punktu od prostej

Można wykazać (zob. wykres 7a), że odległość punktu P_0 od prostej l przechodzącej przez punkt P_1 i równoległej do wektora $\overrightarrow{v}$ wyraża się wzorem

$$d\left(P_0, l\right) = \frac{\|\overrightarrow{P_1 P_0} \times \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}. \tag{12.17}$$

Ćwiczenie Uzasadnić powyższy wzór.



Wykres 7. Odległość punktu P_0 od prostej l (rys. a) oraz odległość między prostymi skośnymi l_1 i l_2 (rys. b).

12.4.4. Odległość między płaszczyznami

Rozważmy dwie płaszczyzny równoległe $\pi_1 : Ax+By+Cz+D_1 = 0$ oraz $\pi_2 : Ax+By+Cz+D_2 = 0$ (płaszczyzny równoległe mają ten sam wektor normalny). Ze wzoru (12.16) wynika natychmiast, że odległość między tymi płaszczyznami wyraża się wzorem

$$d\left(\pi_1, \pi_2\right) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

12.4.5. Odległość między prostymi

Niech l_1 (odpowiednio l_2) będzie prostą przechodzącą przez punkt P_1 (odpowiednio P_2) równoległą do wektora $\overrightarrow{v_1}$ (odpowiednio $\overrightarrow{v_2}$).

Proste równoległe

W przypadku, gdy proste l_1 i l_2 są równoległe (możemy wówczas przyjąć, że $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$), wzór na odległość między nimi wynika ze wzoru (12.17). Mamy

$$d\left(l_1, l_2\right) = \frac{\|\overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{v_1}\|}{\|\overrightarrow{v_1}\|}.$$

Proste skośne

Jeżeli proste l_1 i l_2 nie są równoległe (tzn. $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \neq \overrightarrow{0}$; zob. wykres 7b), odległość między nimi obliczamy ze wzoru

$$d\left(l_1, l_2\right) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{P_1 P_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)\right|}{\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|}.$$