Zadanie 1. Ile różnych działań wewnętrznych można określić w zbiorze zawierającym

a) jeden element?
b) n elementów?

Ile jest takich działań, które dodatkowo są przemienne?

Zadanie 2. W zbiorze $K = \{\blacksquare, \blacktriangle\}$ wprowadzamy działania h_1 i h_2:

h_1	$\blacksquare$	$\blacktriangle$
$\blacksquare$	$\blacksquare$	$\blacktriangle$
$\blacktriangle$	$\blacktriangle$	$\blacksquare$

h_2	$\blacksquare$	$\blacktriangle$
$\blacksquare$	$\blacksquare$	$\blacksquare$
$\blacktriangle$	$\blacksquare$	$\blacktriangle$

.

Sprawdź, czy

a) działania są
  i. przemienne?
  ii. łączne?
  iii. rozdzielne jedno względem drugiego?
b) istnieją elementy neutralne w K dla h_1 i h_2?
c) istnieją elementy odwrotne w K dla $\blacksquare$ i $\blacktriangle$ względem h_1 i h_2?

Zadanie 3. W zbiorze $K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ określamy działania $+$ i $\cdot$ w następujący sposób:

$$+ : K \times K \ni ((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \to (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in K$$
$$\cdot : K \times K \ni ((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \to (a_1 a_2 + p b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \in K,$$

gdzie $p \in \mathbb{R}$. Wyznacz wszystkie wartości p, dla których

a) powyższe działania są:
  i. wewnętrzne,
  ii. przemienne,
  iii. łączne,
b) zachodzi rozdzielność $\cdot$ względem $+$,
c) każdy element zbioru K posiada element odwrotny (wzg. $+$) oraz element przeciwny (wzg. $\cdot$).

Zadanie 4. W zbiorze K wprowadzamy działanie. Wyznacz dla tego działania element neutralny (o ile istnieje) oraz dla elementów zbioru K elementy odwrotne (o ile istnieją):

a) $K = \mathbb{Z}$ z działaniem $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (a, b) \to a + b + 2 \in \mathbb{Z}$,
b) $K = \{f : A \to A : f - \text{bijekcja}\}$ z działaniem składania odwzorowań

$$\circ : K \times K \ni (f, g) \to f \circ g \in K,$$

c) $K = \{\triangle, \square, \bigcirc\}$ z działaniem

$*$	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
$\triangle$	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
$\square$	$\square$	$\bigcirc$	$\triangle$
$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\triangle$	$\square$

,

d) $K = \mathbb{Z}_m = \{0, \ldots, m-1\}$ z działaniem

$$+_{\mathrm{mod}\, m} : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \ni (a, b) \to (a+b)_{\mathrm{mod}\, m} \in \mathbb{Z}_m,$$

gdzie $c_{\mathrm{mod}\, m}$ to reszta z dzielenia c przez m, np.: $17_{\mathrm{mod}\, 4} = 1$,

e) $K = P(X)$ (zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X) z działaniem $\div$ (różnica symetryczna zbiorów),

f) $K = \{\mathbb{R} \backslash \{0\}\} \times \mathbb{R}$ z działaniem

$$\odot : K \times K \ni ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \to (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_1) \in K.$$

Odpowiedzi:

Zadanie 1: a) 1; b) n^{n^2}, z czego $n^{\frac{n^2+n}{2}}$ działań to działania przemienne;

Zadanie 2: a) i: są, ii: są, iii: działanie h_2 jest rozdzielne względem h_1, działanie h_1 nie jest rozdzielne względem h_2 (np. $h_1(\blacktriangle, h_2(\blacktriangle, \blacksquare)) \neq h_2(h_1(\blacktriangle, \blacktriangle), h_1(\blacktriangle, \blacksquare))$); b) $e_{h_1} = \blacksquare$, $e_{h_2} = \blacktriangle$; c) nie istnieje element odwrotny dla $\blacksquare$ względem działania h_2.

Zadanie 3: a) i: $p \in \mathbb{Q}$; ii: $p \in \mathbb{Q}$; iii: $p \in \mathbb{Q}$; b) $p \in \mathbb{Q}$; c) dla działania $\bullet$ jest: $p \neq q^2$, $\forall q \in \mathbb{Q}$.

Zadanie 4: a) $e = -2$, $a^{-1} = -a - 4$; b) $e = \mathrm{id}_A$, f^{-1} - funkcja odwrotna; c) $e = \triangle$, $\triangle^{-1} = \triangle$, $\square^{-1} = \bigcirc$, $\bigcirc^{-1} = \square$; d) $e = 0$, $0^{-1} = 0$, $k^{-1} = m - k$ $(k = 1, \ldots, m-1)$; e) $E = \{\varnothing\}$, $A^{-1} = A$; f) $e = (1, 0)$, $(a_1, a_2)^{-1} = \left(a_1^{-1}, -a_2 a_1^{-2}\right)$.