Zadanie 1. Sprawdź, czy struktury algebraiczne rozważane w zadaniu 4. (zestaw 1.) są grupami. Czy są to grupy abelowe?

Zadanie 2. Niech $f_1(x) \overset{df}{=} x$, $f_2(x) \overset{df}{=} 1-x$, $f_3(x) \overset{df}{=} \frac{1}{x}$, $f_4(x) \overset{df}{=} 1-\frac{1}{x}$, $f_5(x) \overset{df}{=} \frac{1}{1-x}$, $f_6(x) \overset{df}{=} \frac{x}{x-1}$. Udowodnij, że struktura algebraiczna $(\{f_1, \ldots, f_6\}, \circ)$, gdzie $\circ$ – składanie odwzorowań; jest grupą. Czy jest to grupa abelowa?

Zadanie 3. Wykaż, że zbiór utworzony z symetrii kwadratu względem jego osi symetrii, z przekształcenia tożsamościowego ([1]) oraz z obrotów kwadratu dookoła środka kwadratu o kąt $\frac{\pi}{2}$ z działaniem składania odwzorowań tworzą ośmioelementową grupę nieprzemienną.

Zadanie 4. Niech $(G, *)$ będzie grupą z elementem neutralnym e taką, że: $\forall a \in G : a * a = e$. Czy $(G, *)$ jest grupą abelową?

Zadanie 5. Niech $(G, *)$ będzie grupą. Pokaż, że $a * a = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy a jest elementem neutralnym dla $*$ w G.

Zadanie 6.* Niech (G_i, h_i), $i = 1, \ldots, n$ będą grupami (abelowymi) z elementami neutralnymi $e_1, \ldots, e_n$. Czy zbiór $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ z działaniem

$$h : G \times G \ni ((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) \to (h_1(a_1, b_1), \ldots, h_n(a_n, b_n)) \in G$$

jest grupą (abelową) ?

Zadanie 7. W zbiorze $K = \{a, b\}$ wprowadzamy działania $\diamond$ i $\circ$:

$\diamond$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$\circ$	a	b
a	a	a
b	a	b

.

Sprawdź, czy struktura $(K, \diamond, \circ)$ jest ciałem, a następnie rozwiąż równanie

$$a \circ (x \diamond (b \circ a)) = (a \circ b) \diamond a.$$

Zadanie 8. Sprawdź, czy określona poniżej struktura algebraiczna jest ciałem:

a) $(\Pi_n, +, \cdot)$, gdzie Π_n – zbiór wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej n; $+$ i $\cdot$ – naturalne działania dodawania i mnożenia wielomianów,

b) $(\Pi, +, \cdot)$, gdzie Π – zbiór wielomianów rzeczywistych; $+$ i $\cdot$ – naturalne działania dodawania i mnożenia wielomianów,

c) $(\mathcal{W}, +, \cdot)$, gdzie $\mathcal{W}$ – zbiór funkcji wymiernych (iloraz dwóch wielomianów); $+$ i $\cdot$ – naturalne działania dodawania i mnożenia funkcji,

d) $(P(X), \div, \cap)$, gdzie $P(X)$ – zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X; $\div$ i $\cap$ to działania określone w sposób następujący:

$$\div : P(X) \times P(X) \ni (A, B) \to (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \in P(X)$$
$$\cap : P(X) \times P(X) \ni (A, B) \to A \cap B \in P(X),$$

e) $(A, \star, \circ)$, gdzie $A \overset{df}{=} \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leqslant x < 1\}$; $\star$ i $\circ$ – działania określone następująco:

$$a \star b = \min\{a, b\}, \ a \circ b = \max\{a, b\} \ .$$

Zadanie 9. Czy $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right], +, \cdot\right)$ jest ciałem, jeżeli $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{x + \sqrt{2}y : x, y \in \mathbb{Q}\right\}$, a $+$ oraz $\cdot$ to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb?

[1] f–przekształcenie tożsamościowe $\overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in K : f(x) = x$.

Odpowiedzi:

Zadanie 1:

Zadanie nr:	grupa	grupa abelowa
a)	tak	tak
b)	tak	nie
c)	tak	tak
d)	tak	nie
e)	tak	tak
f)	tak	tak
g)	tak	tak

Zadanie 4: Tak. Wskazówka: $\forall a, b \in G : abab = e$;

Zadanie 6*: Tak;

Zadanie 7: Struktura $(\{a, b\}, \diamond, \circ)$ jest ciałem oraz $x = a \vee x = b$;

Zadanie 8: a) nie jest; b) nie jest; c) jest; d) nie jest; e) nie jest;

Zadanie 9: Tak.