Zadanie 1. Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Podaj interpretację geometryczną następujących liczb:

a) z, b) $\overline{z}$, c) $z_1 + z_2$, d) $z_1 - z_2$, e) $|z|$, f)* $z_1 z_2$.

Zadanie 2. Dla liczb zespolonych uzasadnij poniższe zależności:

a) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ oraz $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, dla $z_2 \neq 0$;

b) $z\overline{z} = |z|^2$;

c) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ oraz $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, dla $z_2 \neq 0$,

d) $\mathfrak{Re} z \leqslant |z|$ oraz $\mathfrak{Im} z \leqslant |z|$;

e) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

f) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$.

Zadanie 3. Sprowadź do postaci algebraicznej (dwumiennej) następujące wyrażenia:

a) $\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$;

b) $\frac{1-2i}{3i+2}$;

c) $\frac{1}{i} + \frac{2+i}{2-i}$;

d) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, dla $n \in \mathbb{N}$;

e*) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$, dla $n \in \mathbb{N}$;

f*) $(\sin\alpha + i\cos\alpha)^n$, dla $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 4. Rozwiąż równania z niewiadomymi $z \in \mathbb{C}$; $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $z^2 + (3-2i)z + 1 - 3i = 0$,

b) $|z| + z = 1 + i$,

c) $\begin{cases} (1+2i)x + (2-2i)y = 5+4i \\ (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i \end{cases}$,

d) $\begin{cases} (1-2i)x - (1-4i)y = 2-2i \\ (-2-i)x + (2+2i)y = -4-i \end{cases}$,

e) $(z-2)^2 + 2\mathfrak{Im} z + z = 1$,

f) $\frac{1+i}{z} = \frac{2-3i}{\overline{z}}$,

g) $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$,

h) $z^4 + 4z^2 + 8 = 0$,

i) $(3-i)x^2 - (3+2i)x - (1-i)y = 13 - 10i$,

j) $(2+3i)x^2 - (2+i)x + (4-4i)y = 8 - 17i$.

Zadanie 5. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz liczby zespolone z, dla których

a) liczba $\frac{z+4}{z-2i}$ jest rzeczywista,

b) liczba $\frac{z}{iz+4}$ jest czysto urojona,

c) liczba $\frac{(z-\alpha)^2\overline{z-\alpha}}{z-\alpha} - 2$ jest niedodatnia,

d) liczba $\frac{z+i}{z-i}$ nie jest ujemna.

Zadanie 6. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz wszystkie liczby zespolone z, których moduł jest liczbą całkowitą i dla których liczba $z^2+(1+i)z$ jest czysto urojona.

Odpowiedzi:

Zadanie 2: c) Wskazówka: wykorzystać własności a) i b); e) Dla $z_1+z_2\neq 0$ mamy:

$$1=\mathfrak{Re}\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}+\frac{z_2}{z_1+z_2}\right)=\mathfrak{Re}\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right)+\mathfrak{Re}\left(\frac{z_2}{z_1+z_2}\right)\overset{\text{d)+c)}}{\leqslant}$$
$$\leqslant\frac{|z_1|}{|z_1+z_2|}+\frac{|z_1|}{|z_1+z_2|};$$

f) $|z_1|=|z_1-z_2+z_2|\overset{\text{e)}}{\leqslant}|z_1-z_2|+|z_2|$, następnie zamienić rolą z_1 i z_2.

Zadanie 3: a) $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}$; b) $-\frac{4}{13}-\frac{7}{13}i$; c) $\frac{3}{5}-\frac{i}{5}$; d) $2i^{n-1}$; e) $\cos n\alpha+i\sin n\alpha$;

f) $i^n(\cos n\alpha-i\sin n\alpha)=$

$$=\begin{cases}(-1)^{n/2}\cos n\alpha+i(-1)^{1+n/2}\sin n\alpha, & n=2k\\ (-1)^{(n-1)/2}\sin n\alpha+i(-1)^{(n-1)/2}\cos n\alpha, & n=2k+1\end{cases},\ \text{dla } k\in\mathbb{N}.$$

Zadanie 4: a) $-2+i,-1+i$;

b) i;

c) $\varnothing$;

d) $x=3, y=1$;

e) $\frac{3}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{7}}{2}\right), \frac{3}{2}+i\left(1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$;

f) $\varnothing$;

g) $-1, 1, -i\sqrt{5}, i\sqrt{5}$;

h) $\left(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right)$, $\left(-1+\sqrt{2},-1-\sqrt{2}\right)$, $\left(-1+\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right)$,

$\left(-1-\sqrt{2},1-\sqrt{2}\right)$;

i) $(x,y)\in\{(3,5), \left(-\frac{1}{2},-10\frac{3}{4}\right)\}$;

j) $\varnothing$;

Zadanie 5: a) $\left\{(x,y): y=\frac{1}{2}x+2,\ x\neq 0\right\}$;

b) $\{(x,y): x=0,\ y\neq 4\}$;

c) $\left\{z: 0<|z-a|\leqslant\sqrt{2}\right\}$;

d) $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}:\mathfrak{Re}z=0,\ \mathfrak{Im}z\in(-1,1]\}$.