Zadanie 1. Poniższe liczby i wyrażenia przedstaw w postaci trygonometrycznej:

a) $\sqrt{3}-i$, b) $-6+6i$, c) $\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1+i}$, d) $1+i\operatorname{tg}\varphi$,

e) $\sin\varphi - i\cos\varphi$, f) $1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$, g) $\frac{1+i\operatorname{tg}\varphi}{1-i\operatorname{tg}\varphi}$, h) $\frac{\operatorname{tg}\varphi+i}{\operatorname{tg}\varphi-i}$.

Zadanie 2. Poniższe wyrażenia sprowadź do postaci kanonicznej (dwumiennej):

a) $(1+i)^7$, b) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$, c) $\left(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{14}$, d) $\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$,

e) $\frac{(1-i)^7}{(-\sqrt{3}-i)^6}$, f) $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$, g) $(1+i)^7-(2-2i)^4$, h) $1+i+i^2+\cdots+i^n$, $n\in\mathbb{N}$.

Zadanie 3. Znajdź funkcję $\omega:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniającą poniższe równanie:

a) $\cos 3x=\omega(\cos x)$,
b) $\sin 5x=\omega(\sin x)$,
c) $\operatorname{ctg} 4x=\omega(\operatorname{ctg} x)$.

Zadanie 4. Dla $n\in\mathbb{N}$ oraz $x\in\mathbb{R}$ oblicz:

a) $1+\cos x+\ldots+\cos nx$,
b) $\sin 2x+\cos 3x+\sin 4x+\cos 5x+\ldots+\sin 2nx+\cos(2n+1)x$.

Zadanie 5. Naszkicuj na płaszczyźnie zespolonej poniższe zbiory:

a) $\{z\in\mathbb{C}: |z-a|=b\}$, dla $a\in\mathbb{C}, b\in\mathbb{R}$,
b) $\{z\in\mathbb{C}: 2<|z|\leqslant 4\}$,
c) $\{z\in\mathbb{C}: |z-a|=|z-b|\}$, dla $a,b\in\mathbb{C}$,
d) $\{z\in\mathbb{C}: |z-a|+|z-b|=c\}$, dla $a,b\in\mathbb{C}, c\in\mathbb{R}$,
e) $\{z\in\mathbb{C}: \mathfrak{Re}(iz+2)\geqslant 0\}$,
f) $\{z\in\mathbb{C}: |z+1|\geqslant 2 \wedge \mathfrak{Im}(z+1)\leqslant 1\}$,
g) $\left\{z\in\mathbb{C}: \arg(z+iz)=\frac{3\pi}{2}\right\}$,
h) $\left\{z\in\mathbb{C}: \frac{\pi}{4}\leqslant \arg\frac{i}{z}<\frac{\pi}{2}\right\}$,
i) $\left\{z\in\mathbb{C}: \arg\left(z^4\right)=\pi\right\}$,
j) $\left\{z\in\mathbb{C}: \arg\left(z^3\right)<\frac{\pi}{2}\right\}$.

Zadanie 6. Wyznacz algebraicznie, a następnie zaznacz na płaszczyźnie zespolonej podane zbiory:

a) $\sqrt[3]{-8i}$, b) $\sqrt[6]{-27}$, c) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$, d) $\sqrt{-7+24i}$,

e) $\sqrt[3]{z}$, gdzie $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3\left(\sqrt{3}-i\right)^6 z=(1+i)^{12}$.

Zadanie 7. Odgadując jeden z elementów poniższych zbiorów wyznacz pozostałe:

a) $\sqrt[3]{-27i}$,
b) $\sqrt[4]{(2-2i)^{12}}$.

Zadanie 8. W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż równanie:

a) $(z-1)^4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
b) $(2z-2)^4 = \left(\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right)^8$,
c) $z^4 - 2z^2 + 5 = 0$,
d) $(z+2)^n - (z-2)^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$,
e) $(z+1+i)^4 + (1+2i)^8 = 0$.

Zadanie 9. Ile wynosi suma wszystkich pierwiastków algebraicznych stopnia n z 1?

Zadanie 10.* Wykaż, że w ciągu $a_n = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, nie występują dwa identyczne wyrazy.

Zadanie 11. Jednym z wierzchołków sześciokąta foremnego jest $w_0 = \sqrt{3} + i$. Wyznacz pozostałe wierzchołki tego wielokąta, wiedząc że jego środek leży w:

a) początku układu współrzędnych,
b) punkcie $s_0 = 2\sqrt{3} + i$.

Zadanie 12.* Znajdź funkcję $\vartheta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spełniającą poniższe równanie:

a) $\cos x = \vartheta(\mathrm{e}^{ix})$,
b) $\sin x = \vartheta(\mathrm{e}^{ix})$,
c) $\operatorname{tg} x = \vartheta(\mathrm{e}^{ix})$.

Zadanie 13. Rozwiąż równanie:

a) $(\overline{z})^6 = 4\left|z^2\right|$,
b) $\frac{z^6}{|z|^4} = \overline{z}$,
c) $z^n = n|z|$, $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 14.* Znajdź zależność, która łączy pięć najważniejszych stałych matematycznych: π, e – podstawa logarytmu naturalnego, i – jednostka urojona, 1 – element neutralny mnożenia, 0 – element neutralny dodawania ([1]).

Odpowiedzi:

Zadanie 1: a) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;
b) $6\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$;
d) $\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$;
e) $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;
f) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;
g) $\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$;
h) $\cos(\pi - 2\varphi) + i\sin(\pi - 2\varphi)$;

[1] Przez wielu matematyków rozwiązanie tego zadania jest uznawane za najładniejszy wzór matematyczny.

Zadanie 2: a) $8-8i$; b) $-\frac{1}{8}i$; c) 1; d) -27; e) $-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}i$; f) $-\frac{1}{25}-\frac{32}{25}i$; g) $72-8i$;

h) $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+(-1)^k+i\left(1-(-1)^k\right)\right), & \text{dla } n=2k \\ \frac{1}{2}(1+i)\left(1+(-1)^k\right), & \text{dla } n=2k+1 \end{cases}$

Zadanie 3: a) $\varpi(t)=4t^3-3t$; b) $\varpi(t)=16t^5-20t^3+5t$; c) $\varpi(t)=\frac{t^4-6t^2+1}{4t\left(t^2-1\right)}$;

Zadanie 4: a) $\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{nx}{2}$, dla $x\neq 2k\pi$; $n+1$, dla $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

b) $\frac{\sin nx}{\sin x}(\sin x(n+1)+\cos x(n+2))$, dla $x\neq k\pi$, -1, dla $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

Zadanie 6: a) $\sqrt{3}-i, -\sqrt{3}-i, 2i$; b) $\pm i\sqrt{3}, \frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;c) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $3+4i, -3-4i$; e) $\frac{1}{2}i, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}-i\frac{1}{4}$.

Zadanie 7: a) $3i$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$, $-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$; b) $-16-16i$, $16-16i$, $16+16i$, $-16+16i$;

Zadanie 8: a) $1+\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}$, $1-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}+i\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}$, $1-\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}$, $1+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}-i\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}$;

b) $\frac{43}{50}-\frac{24}{50}i$, $\frac{26}{50}+\frac{7}{50}i$, $\frac{57}{50}+\frac{24}{50}i$, $\frac{74}{50}+\frac{7}{50}i$;

c) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, $-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, $-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$;

d) $-2\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}}{1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}}$, $k=1,\dots,n-1$;

Zadanie 9: 0;

Zadanie 11: a) $\pm 2i$, $\pm\sqrt{3}+i$, $\pm\sqrt{3}-i$; b) $\sqrt{3}+1$, $3\sqrt{3+1}$, $\frac{3}{2}\sqrt{3}+1\pm\frac{3}{2}i$, $\frac{5}{2}\sqrt{3}+1\pm\frac{3}{2}i$;

Zadanie 12: a) $\vartheta(t)=\frac{t+t^{-1}}{2}$; b) $\vartheta(t)=\frac{t-t^{-1}}{2i}$; c) $\vartheta(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}i$;

Zadanie 13: a) 0, $\sqrt{2}e^{-i\frac{k\pi}{3}}$, $k=0,\dots,5$;

b) $e^{i\frac{2k\pi}{7}}$, $k=0,\dots,13$;

c) $z_0=0$, $z_k=\sqrt[n-1]{n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$, $k=0,\dots,n-1$;

Zadanie 14: $e^{i\pi}+1=0$.