Zadanie 1. Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(X,+,\cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$, jeżeli:

a) $X=\mathbb{R}^n$ oraz

$$+:X\times X\ni((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n))\to(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\in X$$
$$\cdot:\mathbb{R}\times X\ni(\alpha,x_1,\ldots,x_n)\to(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)\in X;$$

b) $X=\mathbb{R}^n$ oraz

$$+:X\times X\ni((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n))\to(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\in X$$
$$\cdot:\mathbb{R}\times X\ni(\alpha,x_1,\ldots,x_n)\to(\alpha x_1,0,\ldots,0)\in X;$$

c) $X=\mathbb{R}^A\overset{df}{=}\{f:A\to\mathbb{R}\}$ oraz

$$+:X\times X\ni(\eta,\varphi)\to\eta+\varphi\in X$$
$$\cdot:F\times X\ni(\alpha,\varphi)\to\alpha\varphi\in X;$$

d) $X=\Pi_n\overset{df}{=}\{x\to a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n : a_i\in\mathbb{R}, i=0,\ldots,n\}$ z naturalnymi działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez liczbę;

e) $X=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(-x)=f(x)\}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczbę;

f) $X=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(-1)=f(1)=0\}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczbę,

g)* $X=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\ f\text{– funkcja okresowa}\}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczbę,

h)* $X=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\ f\text{– funkcja okresowa o okresie wymiernym}\}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczbę.

Zadanie 2. Sprawdź, czy:

a) $Y=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i=a\right\}$, dla pewnego $a\in\mathbb{R}$, jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$;

b) $Y=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(-x)=-f(x)\}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni funkcji prowadzących z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami + i $\cdot$.

Zadanie 3. Sprawdź, czy:

a) jeżeli $Y_1,\ldots,Y_n$ są podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni $\mathcal{X}$, to $\bigcap_{k=1}^{n} Y_k$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathcal{X}$;

b) jeżeli $Y_1,\ldots,Y_n$ są podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni $\mathcal{X}$, to $\bigcup_{k=1}^{n} Y_k$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathcal{X}$.

Zadanie 4. W oparciu o poprzednie zadanie uzasadnij, że

$$Y=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-z=0, x=2z\right\}$$

jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\left(\mathbb{R}^3,+,\cdot\right)$.

Zadanie 5.* Niech U i V będą podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni $\mathcal{X}$. Uzasadnij, że

$$U \cup V \text{ – podprzestrzeń wektorowa } \mathcal{X} \Leftrightarrow U \subset V \text{ lub } V \subset U.$$

Zadanie 6. Sprawdź liniową zależność wektorów w podanych przestrzeniach wektorowych (z naturalnymi działaniami + i ·):

a) $(1,0), (1,1), (0,1)$ w $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ nad $\mathbb{R}$;

b) $\sqrt{2}$ i 2 w $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$;

c) $\sqrt{2}$ i 2 w $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{Q}$;

d) $1, x, x^2, \ldots, x^n$ w $(\Pi_n, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$ ([1]);

e) $1, x, x+\sqrt{2}, x^2, \ldots, x^n$ w $(\Pi_n, +, \cdot)$ nad $\mathbb{Q}$;

f) $1, \sin x, \cos x$ w $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$, gdzie $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \stackrel{df}{=} \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ – ciągła}\}$;

g) $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x$ w $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$.

Zadanie 7. Wyznacz bazy podanych przestrzeni wektorowych (z naturalnymi działaniami + i ·):

a) $(\Pi_n, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$;

b) $(P_{2n}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$, gdzie $P_{2n} \stackrel{df}{=} \{w \in \Pi_{2n} : w(x) = w(-x)\}$;

c) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$;

d) $(\Pi_n(\alpha), +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$, gdzie $\Pi_n(\alpha) \stackrel{df}{=} \{w \in \Pi_n : w(\alpha) = 0\}$;

e) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0, 2x - z = 0\right\}$ nad $\mathbb{R}$,

f) $\{z \in \mathbb{C} : 3\mathfrak{Re}z - 2\mathfrak{Im}z = 0\}$.

Zadanie 8.* Wyznacz wymiar przestrzeni wektorowej $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{Q}$. Działania + oraz · to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb.

Zadanie 9.* Pokaż, że $\forall x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R} : x_i \neq x_j$ (dla $i \neq j$) wielomiany $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$:

$$\varphi_i(x) \stackrel{df}{=} \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \text{ dla } i = 0, \ldots, n$$

stanowią bazę przestrzeni wielomianów Π_n.

Odpowiedzi:

Zadanie 1: a) jest; b) nie jest; c) jest; d) jest; e) jest; f) jest; g)* nie jest; h)* jest;

Zadanie 2: a) jest dla $\alpha = 0$; b) jest;

Zadanie 3: a) tak; b) wskazówka: Zadanie 5;

Zadanie 4: Wskazówka: uzasadnić, że

$$Y_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\right\} \text{ oraz } Y_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2z\right\}$$

to podprzestrzenie wektorowe przestrzeni $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot\right)$, a następnie zastosować zadanie 3a);

---

[1] $\Pi_n \stackrel{df}{=} \{x \to a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R} \ (i = 0, \ldots, n)\}$

Zadanie 5*: Uzasadnienie:

- $\Leftarrow$ twierdzenie oczywiste;
- $\Rightarrow$ Hp.: $U \not\subset V$ i $V \not\subset U$. Wówczas: $\exists\ u, v : u \in U\backslash V$ i $v \in V\backslash U$. Pokażemy teraz, że $u+v \notin U \cup V$, mimo że $u, v \in U \cup V$. Warunek $u+v \in U \cup V$ oznaczałby, że $u+v \in U$ lub $u+v \in V$. Ponieważ

$$\text{gdyby } u+v \in U \overset{-u\in U}{\Longrightarrow} v = -u + (u+v) \in U - \text{sprzeczność}$$

$$\text{gdyby } u+v \in V \overset{-v\in V}{\Longrightarrow} u = -v + (u+v) \in V - \text{sprzeczność.}$$

Zadanie 6: Liniowo zależne są wektory z przykładów: a), b), g);

Zadanie 7: Przykładowe bazy: a) $1, x, x^2, \ldots, x^n$; b) $1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n}$; c) $1+i, 1-i$; d) $x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$; e) $(1, -3, 2)$; f) $2+3i$;

Zadanie 8*: $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, +, \cdot) = \#\mathbb{R} = \mathfrak{c}$. Wskazówka: uzasadnić, że każda przestrzeń liniowa o przeliczalnej bazie rozważana nad przeliczalnym ciałem jest przestrzenią zawierającą przeliczalną liczbę elementów.

Zadanie 9*: Wskazówka: pokazać, że $\varphi_i(x_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$.