Zadanie 1. Niech $\mathbb{F}^{n\times m}$ oznacza zbiór macierzy o n wierszach, m kolumnach oraz o elementach należących do zbioru $\mathbb{F}$. Sprawdź, czy:

a) struktura $(\mathbb{R}^{n\times m}, +)$ jest grupą abelową, gdzie $+$ – dodawanie macierzy;

b) struktura $(\mathbb{R}^{n\times n}, \bullet)$ jest grupą abelową, gdzie $\bullet$ – mnożenie macierzy;

c) struktura $(A, +, \bullet)$ jest ciałem, gdzie $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $+$ – dodawanie macierzy, $\bullet$ – mnożenie macierzy,

d) struktura $(\mathbb{R}^{n\times m}, +, \bullet)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$, gdzie $+$ – dodawanie macierzy, $\bullet$ – mnożenie macierzy przez liczbę. W przypadku pozytywnej odpowiedzi, podaj bazę tej przestrzeni.

Zadanie 2. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz X, spełniającą równanie

a) $4(A - X) + 5(3X + B) = A - B + 8X$;

b) $B^T X = [1\ 1\ 0]^T$.

Zadanie 3. Znajdź macierz trójkątną dolną L z dodatnimi elementami na przekątnej spełniającą równanie:

$$LL^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. Sprawdź, czy dla $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ prawdziwe są poniższe zależności:

a) $AB = BA$;

b) $AB = \mathbf{0} \Rightarrow (A = \mathbf{0} \vee B = \mathbf{0})$, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

c) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

d) $AB = BA \Rightarrow (A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

Zadanie 5. Wyznacz $f(A)$, jeżeli $f(x) = x^2 - 5x + 3$ oraz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

Zadanie 6.* Uzasadnij, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ istnieje wielomian $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taki, że $f(A) = 0$.

Zadanie 7. Rozwiąż macierzowy układ równań

$$\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

Zadanie 8.* Dla macierzy

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \text{ dla } i = \sqrt{-1}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{ dla } \theta \in \mathbb{R}$$

wyznacz $A^n \overset{df}{=} \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{\times n}$.

Zadanie 9.* Dla macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ określamy odwzorowanie $\Psi : \mathbb{R}^n \ni x \to Ax \in \mathbb{R}^n$. Podaj interpretację geometryczną odwzorowania Ψ w przypadku, gdy

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{ dla } \theta \in \mathbb{R}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

W oparciu o interpretację geometryczną odwzorowania Ψ, uzasadnij jego bijektywność oraz wyznacz odwzorowanie odwrotne Ψ^{-1}.

Zadanie 10. Udowodnij, że iloczyn macierzy trójkątnych górnych (dolnych) jest macierzą trójkątną górną (dolną).

Zadanie 11. Wykaż, że jeżeli $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ jest macierzą ortogonalną (tj. $A^TA = AA^T = I$), to:

a) $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2 = 1$, $\forall j = 1, \ldots, n$;

b) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1$, $\forall i = 1, \ldots, n$;

c) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = 0$, *dla* $i \neq j$.

Zadanie 12. Zadana jest macierz ortogonalna $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Rozwiąż równanie

$$AX\left(A^T\right)^2 = -I^3,$$

z niewiadomą macierzą X, $I-$macierz jednostkowa.

Odpowiedzi:

Zadanie 1: a) jest; b) nie jest; c) jest; d) jest;

Zadanie 2: a) $X = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$; b) $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

Zadanie 3: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$;

Zadanie 4: a) nie; b) nie; c) nie; d) tak;

Zadanie 5: $f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

Zadanie 6*: Wskazówka: wykorzystując zadanie 1d) uzasadnić, że istnieje taka liczba $N \in \mathbb{N}$, że macierze $I, A, \ldots, A^N$ są liniowo zależne;

Zadanie 7: $X = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;

Zadanie 8*: a) $\begin{bmatrix} i^n & 0 \\ 0 & (-i)^n \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$; b) $\begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$;

Zadanie 9*: a) Obrót o kąt θ, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$; b) Symetria względem płaszczyzny $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\right\}$, $A^{-1} = A$;

Zadanie 10: $A = \left[a_{ij}\right]$, $B = \left[b_{ij}\right]$: $a_{ij} = 0$, $b_{ij} = 0$ dla $i < j$. $AB = C = \left[c_{ij}\right]$. Wówczas:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \underset{a_{ik}=0}{\overset{\text{dla } k>i}{=}} \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj} \underset{b_{kj}=0}{\overset{\text{dla } k<j}{=}} \sum_{k=j}^{i} a_{ik} b_{kj}, \text{ czyli dla } i<j : c_{ij} = 0.$$

Zadanie 11: Wskazówka: rozpisać warunki ortogonalności jak w zadaniu poprzednim.

Zadanie 12: $-A$.