Zadanie 1. Odwzorowanie liniowe injektywne (odp. surjektywne, bijektywne) nazywamy *monomorfizmem* (*odp. epimorfizmem, izomorfizmem*). Niech $F : X \to Y$, gdzie $\dim X = \dim Y = n$ ($n \in \mathbb{N}$), będzie odwzorowaniem liniowym. Uzasadnij, że następujące warunki są równoważne.

a) odwzorowanie F jest monomorfizmem;
b) $\ker F = \{0\}$;
c) $\dim \operatorname{Im}(F) = \dim Y$;
d) odwzorowanie F jest epimorfizmem;
e) odwzorowanie F jest izomorfizmem.

Zadanie 2. Rozważmy funkcję $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ określoną wzorem

$$F : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2a-b+2c-d & b+2c-d \\ 2c & b-2c+3d \end{bmatrix}.$$

a) Uzasadnij, że F jest endomorfizmem.
b) Wyznacz jądro oraz obraz endomorfizmu F; wyznacz bazy tych przestrzeni. Czy F jest injekcją (surjekcją)?
c) W wybranej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 2}$ wyznacz macierz A_F endomorfizmu F.
d) Wyznacz wartości oraz wektory własne macierzy A_F.
e) Wyznacz wartości oraz wektory własne endomorfizmu F.
f) Wyznacz macierz przejścia z wybranej w punkcie c) bazy przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 2}$ do bazy e:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

g) Wyznacz macierz Jordana macierzy A_F.
h) Wyznacz bazę Jordana przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 2}$ względem endomorfizmu F.

Zadanie 3. Niech $\Phi_n : \Pi_n \ni f \to f' \in \Pi_n$.

a) Wyznacz $\ker \Phi_n$, $\operatorname{Im} \Phi_n$ oraz bazy tych przestrzeni.
b) Wyznacz macierz A_{Φ_n} odwzorowania Φ_n w bazie e:

$$e_0 = 1, \quad e_1 = 1 + x, \quad e_2 = 1 + x + x^2, \quad \ldots, \quad e_n = 1 + x + \ldots + x^n.$$

c) Rozważmy bazę $\tilde{e} = (\tilde{e}_0, \ldots, \tilde{e}_n)$ przestrzeni Π_n, gdzie $\tilde{e}_i = x^i$ ($i = 0, \ldots, n$). Wyznacz macierz przejścia P z bazy e do bazy $\tilde{e}$ oraz macierz P^{-1}.
d) Wyznacz wartości i wektory własne macierzy A_{Φ_n} oraz endomorfizmu Φ_n.
e) Czy endomorfizm Φ_n jest diagonalizowalny?
f) Wykorzystując macierzową reprezentację endomorfizmu Φ_3 oblicz $\left(1 + x^2 + 6x^3\right)'$.

Zadanie 4. Niech $X = \operatorname{span}\{e^x, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$. Rozważmy odwzorowanie $F(f) = f'' + f$.

a) Czy F jest endomorfizmem na X?
b) Jeżeli odpowiedź w punkcie a) jest pozytywna, wyznacz wartości własne endomorfizmu F. Czy jest on diagonalizowalny?