Zadanie 1. Niech s_1 i s_2 będą iloczynami skalarnymi w rzeczywistej przestrzeni wektorowej X. Pokaż, że odwzorowanie $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$, również określa iloczyn skalarny w X.

Zadanie 2. Pokaż, że jeżeli s jest iloczynem skalarnym w przestrzeni wektorowej X, a Y jest jej podprzestrzenią liniową, to $s_{|Y\times Y}$ jest iloczynem skalarnym w Y.

Zadanie 3. Wyznacz ogólną postać iloczynu skalarnego w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 4. Niech układ wektorów $e_1, \ldots, e_n$ ($e_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$) będzie układem ortogonalnym w przestrzeni wektorowej wyposażonej w iloczyn skalarny. Pokaż, że wektory $e_1, \ldots, e_n$ są liniowo niezależne.

Zadanie 5. Rozważmy podprzestrzeń liniową $Y = \{(x, y, z) : 2x + y - z = 0\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznacz ortonormalną, w sensie naturalnego iloczynu skalarnego, bazę przestrzeni Y.

Zadanie 6. Sprawdź, że w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ wektory

$$e_1 = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right), \quad e_2 = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)$$

są ortonormalne, a następnie znajdź wektory e_3 i e_4 takie, aby układ e_1, e_2, e_3, e_4 był jej bazą ortonormalną. W $\mathbb{R}^4$ przyjmij naturalny iloczyn skalarny.

Zadanie 7. Niech $\circ$ oznacza naturalny iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz niech $\|x\| = \sqrt{x \circ x}$. Niech $v, w \in \mathbb{R}^n$. Pokaż, że

a) $v \perp w \Leftrightarrow \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ (tw. Pitagorasa);

b) $||v|| = ||w|| \Leftrightarrow v + w \perp v - w$;

c) $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\,||v|| \cdot ||w|| \cos \measuredangle(v, w)$;

d) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$;

Zadanie 9. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (z naturalnym iloczynem skalarnym) znajdź rzut ortogonalny wektora $(1, 2, 3)$ na płaszczyznę $l : x + y - z = 0$.

Zadanie 10. Niech Π będzie przestrzenią wielomianów o współczynnikach rzeczywistych. W Π określamy odwzorowanie $s : \Pi \times \Pi \to \mathbb{R}$ wzorem

$$s(p, q) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_{\min\{n,m\}} b_{\min\{n,m\}} ,$$

gdzie $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ i $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$. Udowodnij, że jest to iloczyn skalarny; następnie wyznacz rzut ortogonalny wektora $u(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$ na podprzestrzeń $V = \Pi_m$ ($m < n$).

Zadanie 11. W przestrzeni Π wielomianów o współczynnikach rzeczywistych wprowadzamy iloczyn skalarny

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Wyznacz rzut wektora $u(x) = 2x^2 + 1$ na podprzestrzeń $V = \Pi_1$.

Zadanie 12. Niech $X = \operatorname{span}\left\{1, \sin \pi x, \cos \pi x, \sin^2 \pi x\right\}$. W X wprowadzamy iloczyn skalarny z poprzedniego zadania. Wynacz bazę ortonormalną przestrzeni X; następnie wyznacz rzut ortogonalny wektora $u(x) = \cos 2\pi x$ na podprzestrzeń $V = \operatorname{span}\{1, \sin \pi x\}$.

Odpowiedzi:

Zadanie 4: $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k = 0 \Rightarrow 0 = \left\langle \sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \langle e_k, e_i\rangle \overset{ort.}{=} \alpha_i \|e_i\|^2$;

Zadanie 5: Np.: $\frac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,1)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1)$;

Zadanie 6: Np.: $e_3 = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $e_4 = \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;

Zadanie 9: $(1,2,3)$;

Zadanie 10: $u^*(x) = x^m + \ldots + 1$;

Zadanie 11: $u^*(x) = \frac{5}{3}$;

Zadanie 12: Baza: $\frac{1}{2}, \sin\pi x, \cos\pi x, \sqrt{2}\sin^2\pi x - \frac{\sqrt{2}}{4}$; $u^*(x) = 0$.