Zadanie 1. Poniższe formy kwadratowe zapisz w postaci macierzowej, tj. $h(x) = x^T Ax$:

a) $h(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$,

b) $h(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 4x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 + 5x_2^2 + 2x_3^2$,

c) $h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_3^2 + 5x_2^2 + 6x_3x_4 + 2x_4^2 + x_5^2 + 12x_5x_6 + x_6^2$.

Zadanie 2. Zbadaj określoność form kwadratowych:

a) $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2$,

b) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$,

c) $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 - x_2^2 - 5x_3^2 + 4x_1x_3$.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których odwzorowanie

a) $\varphi_1(x_1, x_2) = x_1^2 + \alpha x_1x_2 + x_2^2 + \alpha^2 - 4$

b) $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + \alpha x_1x_3 + x_3^2$

c) $\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2\alpha x_1x_3 + x_3^2$

jest formą kwadratową, która

- jest dodatnio określona,
- nie jest ujemnie określona,
- jest dodatnio półokreślona.

Zadanie 4. Rozważmy dwie formy kwadratowe

$$F(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha x_1x_3 + 2x_1x_2,$$
$$G(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 - x_3^2.$$

Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ nierówność $F(x_1, x_2, x_3) > G(x_1, x_2, x_3)$ jest prawdziwa dla każdego $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$?

Zadanie 5.* Niech X będzie przestrzenią wektorową wyposażoną w iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Niech $f_1, \ldots, f_n \in X$. Uzasadnij równoważność

$$f_1, \ldots, f_n - \text{ liniowo niezależne } \Leftrightarrow \det G \neq 0,$$

gdzie $G = \left[g_{ij}\right]_{i,j=1}^n \overset{df}{=} \left[\left\langle f_i, f_j \right\rangle\right]_{i,j=1}^n$. [1]

Zadanie 6. Niech $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz niech $x \to x^T Ax$ będzie formą kwadratową dodatnio określoną. Pokaż, że $a_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Czy istnieją podobne warunki dla form ujemnie określonych (półokreślonych)?

Zadanie 7. Niech $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ będzie macierzą o wartościach własnych $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$. Wyznacz wszystkie wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których forma kwadratowa

$$x \to x^T (A + \alpha I)^n x$$

jest dodatnio określona dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

[1] Macierz $\left[\left\langle f_i, f_j \right\rangle\right]_{i,j=1}^n$ to macierz Grama.

Odpowiedzi:

Zadanie 1: a) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 10 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 5 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$;

Zadanie 2: a) $\varphi(x_1, x_2) = \left(x_1 + \frac{3}{2}x_2\right)^2 - \frac{13}{4}x_2^2$ – nieokreślona;

b) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 4\left(x_3 + \frac{x_2}{4}\right)^2 + \frac{x_2^2}{4}$ – nieokreślona;

c) $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = -(x_1 - 2x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2$ – ujemnie określona;

Zadanie 3:

Forma	a)	b)	c)
jest określona dodatnio	$\varnothing$	$\varnothing$	$\alpha \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$
nie jest określona ujemnie	$\alpha = \pm 2$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
jest dodatnio półokreślona	$\alpha = \pm 2$	$\varnothing$	$\alpha = \pm\sqrt{2}$

Zadanie 4: $\alpha \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$;

Zadanie 5*: Zauważmy, że $\forall \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ zachodzi:

$$\beta^T G \beta = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_k \beta_i \langle f_k, f_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k, \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\rangle = \left\| \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k \right\|^2.$$

$\Rightarrow$ $\beta^T G \beta \geq 0$ oraz $\beta^T G \beta = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k = 0 \overset{\text{lin.}}{\underset{\text{niezal.}}{\Longleftrightarrow}} \beta = 0.$ Macierz G jest więc dodatnio określona. Zatem $\det G > 0$.

$\Leftarrow$ Jeżeli $f_1, \ldots, f_n$ są liniowo zależne, to $\exists \beta \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k = 0.$

Wówczas:

$$\forall i = 1, \ldots, n : 0 = \left\langle f_i, \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle f_i, f_k \rangle \beta_k \Rightarrow G\beta = 0.$$

Oznacza to, że jednorodne równanie liniowe $G\beta = 0$ o macierzy kwadratowej G posiada rozwiązanie niezerowe; tym samym $\det G = 0$.

Zadanie 6: Wskazówka: $x \sim e_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, gdzie $\{e_i\}_{i=1}^n$– baza kanoniczna $\mathbb{R}^n$.

Dla ujemnie określonych: $a_{ii} < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$; dla półokreślonych dodatnio: $a_{ii} \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$; dla półokreślonych ujemnie: $a_{ii} \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$;

Zadanie 7: $\alpha > -\lambda_1(A)$.