Rozdział 4

Przestrzenie wektorowe

Rozważania dotyczące przestrzeni wektorowych rozpoczniemy od kilku prostych przykładów.

Przykład 4.1. *W przestrzeni* $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ *wprowadzamy dwa działania: dodawanie*

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

oraz mnożenie przez liczbę rzeczywistą:

$$\alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) := (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)\,.$$

Łatwo sprawdzić, że struktura algebraiczna $(\mathbb{R}^3, +)$ *jest grupą abelową, a działania* $+$ *oraz* $\cdot$ *spełniają następujące warunki:*

a) *dla* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *oraz* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\alpha + \beta) \cdot (x, y, z) = \alpha \cdot (x, y, z) + \beta \cdot (x, y, z)\,;$$

b) *dla* $\alpha \in \mathbb{R}$ *oraz* $(x_1, y_1, z_1)\,, (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$:

$$\alpha \cdot [(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] = \alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) + \alpha \cdot (x_2, y_2, z_2)\,;$$

c) *dla* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *oraz* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\alpha \cdot [\beta \cdot (x, y, z)] = (\alpha\beta) \cdot (x, y, z)\,;$$

d) *dla* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$1 \cdot (x, y, z) = (x, y, z)\,.$$

Przykład 4.2. *W przestrzeni ciągów liczbowych* $C_0 = \left\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$ *wprowadzamy dwa działania: dodawanie*

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} := \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$$

oraz mnożenia przez liczbę rzeczywistą

$$\alpha \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty} := \{\alpha a_n\}_{n=1}^{\infty} .$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, struktura algebraiczna $(C_0, +)$ *jest grupą abelową, a działania spełniają poniższe warunki:*

a) *dla* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *oraz* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_0$:

$$(\alpha + \beta) \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \alpha \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \beta \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty} ;$$

b) *dla* $\alpha \in \mathbb{R}$ *oraz* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_0$:

$$\alpha \cdot (\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty}) = \alpha \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \alpha \cdot \{b_n\}_{n=1}^{\infty} ;$$

c) *dla* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *oraz* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_0$:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = (\alpha\beta) \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty} ;$$

d) *dla* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_0$:

$$1 \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} .$$

Zbiór z działaniami $+$ i $\cdot$ spełniającymi warunki a) – d) z powyższych przykładów nazywać będziemy przestrzenią wektorową (liniową).

4.1. Przestrzeń wektorowa

Niech X będzie dowolnym zbiorem.

Definicja 4.1. *Trójkę* $(X, +, \cdot)$ *nazywamy* ***rzeczywistą przestrzenią wektorową,*** *jeżeli struktura* $(X, +)$ *jest grupą abelową, a działania* $+$ *i* $\cdot$ *spełniają następujące warunki:*

a) $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$;
b) $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$;
c) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;
d) $1 \cdot x = x$,

dla dowolnych $x, y \in X$ *oraz* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Jeżeli warunek* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *zastąpimy warunkiem* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *to trójkę* $(X, +, \cdot)$ *nazywamy* ***zespoloną przestrzenią wektorową****.*

Elementy przestrzeni wektorowej nazywamy **wektorami**.

Przykład 4.3. *Każda z poniższych struktur jest rzeczywistą przestrzenią wektorową:*

a) *przestrzeń* $\mathbb{R}^n$ *z naturalnymi działaniami dodawania wektorów oraz mnożenia wektora przez liczbę:*

$$\begin{aligned}(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) &:= (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\,,\\ \alpha\cdot(x_1,\ldots,x_n) &:= (\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)\,;\end{aligned}$$

b) *zbiór* $\mathbb{C}$ *z naturalnymi działaniami dodawania liczb zespolonych oraz mnożenia liczby zespolonej przez liczbę rzeczywistą;*

c) *zbiór* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : f - \mathit{funkcja}\}$ *z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę.*

Przykład 4.4. *Poniższe struktury* ***nie są*** *przestrzeniami wektorowymi:*

a) *zbiór* $\mathbb{R}^n$ *z działaniami zdefiniowanymi poniżej:*

$$\begin{aligned}(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) &:= (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\,,\\ \alpha\cdot(x_1,\ldots,x_n) &:= (\alpha x_1,0,\ldots,0)\,;\end{aligned}$$

b) *zbiór* $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : f(0)=1\}$ *z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę;*

c) *zbiór* $C_1 = \left\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\right\}$ *z działaniami zdefiniowanymi w przykładzie 4.2.*

4.2. Podprzestrzeń wektorowa

Niech $(X,+,\cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową oraz niech $Y\subset X$.

Definicja 4.2. *Jeżeli zbiór Y oraz działania $+$ i $\cdot$ przestrzeni X spełniają warunki:*

- $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ x,y\in Y \Rightarrow \alpha\cdot x+\beta\cdot y\in Y$;
- $0\in Y$,

to trójkę $(Y,+,\cdot)$ nazywamy ***podprzestrzenią wektorową*** *przestrzeni $(X,+,\cdot)$.*

Łatwo pokazać, że każda podprzestrzeń wektorowa przestrzeni wektorowej jest przestrzenią wektorową.

Przykład 4.5. *Zbiór* $\{z\in\mathbb{C} : 2\mathfrak{Re}z - 3\mathfrak{Im}z = 0\}$ *z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczby zespolonej przez liczbę rzeczywistą jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni* $\mathbb{C}$.

Przykład 4.6. *Zbiór* $\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \forall x\in\mathbb{R} : f(x)=f(-x)\}$ *z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni wektorowej* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Bezpośrednio z definicji wynika, że zbiór pusty tworzy przestrzeń wektorową, ale nie jest podprzestrzenią wektorową żadnej przestrzeni.

Przykład 4.7. *Niech $(X,+,\cdot)$ będzie niepustą przestrzenią wektorową. Wówczas $(\{0\},+,\cdot)$ jest najmniejszą (w sensie liczby elementów) podprzestrzenią wektorową przestrzeni $(X,+,\cdot)$.*

4.3. Liniowa niezależność wektorów

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie rzeczywistą lub zespoloną przestrzenią wektorową.

Definicja 4.3. *Wektory $v_1, \ldots, v_n \in X$ są* ***liniowo niezależne*** *nad ciałem $\mathbb{F}$, jeżeli dla dowolnych skalarów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ zachodzi:*

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0. \tag{4.1}$$

Wektory, które nie są liniowo niezależne są ***liniowo zależne****.*

Wyrażenie $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ nazywamy **kombinacją liniową** wektorów $v_1, \ldots, v_n$. Liniowa zależność wektorów oznacza, że przynajmniej jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

Zauważmy, że lewa strona implikacji (4.1) to równanie ze względu na nieznane liczby $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Jeżeli jedynym rozwiązaniem tego równania jest rozwiązanie zerowe, tj. $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, to na podstawie powyższej definicji wektory $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne.

Przykład 4.8. *Aby sprawdzić liniową niezależność wektorów*

$$v_1 = (1, 0, -1)\,, v_2 = (-1, 1, 1)\,, v_3 = (3, -1, -3)$$

nad ciałem $\mathbb{R}$, należy rozwiązać, wynikające z warunku (4.1), równanie

$$\alpha_1 (1, 0, -1) + \alpha_2 (-1, 1, 1) + \alpha_3 (3, -1, -3) = (0, 0, 0)$$

ze względu na niewiadome $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Równanie to prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest: $\alpha_1 = -2t$, $\alpha_2 = \alpha_3 = t$ $(t \in \mathbb{R})$. Oznacza to, że warunek (4.1) nie jest spełniony; badane wektory są więc liniowo zależne. Faktycznie, z postaci rozwiązania wynika, że $v_2 = 2v_1 - v_3$.

Przykład 4.9. *Sprawdzimy liniową niezależność wektorów $v_1 = 1 + i$ oraz $v_2 = 2 - 3i$ nad ciałem $\mathbb{R}$. Mamy*

$$0 = \alpha_1 (1 + i) + \alpha_2 (2 - 3i) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + (\alpha_1 - 3\alpha_1)\, i,$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_1 = 0 \end{cases},$$

którego jedynym rozwiązaniem jest $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Oznacza to, że wektory $1 + i$ oraz $2 - 3i$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{R}$.

Przykład 4.10. *Sprawdzimy liniową niezależność wektorów rozważanych w poprzednim przykładzie, ale nad ciałem $\mathbb{C}$. Mamy*

$$0 = \alpha_1 (1 + i) + \alpha_2 (2 - 3i) .$$

Tym razem jednak skalary α_1, α_2 mogą przyjąć wartości zespolone. Przekształcając powyższe równanie do postaci

$$\alpha_1 = -\frac{2 - 3i}{1 + i}\alpha_2,$$

wnioskujemy, że posiado ono nieskończenie wiele rozwiązań. Oznacza to, że wektory $1 + i$ oraz $2 - 3i$ są liniowo zależne nad $\mathbb{C}$.

4.4. Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

Niech $v_1, \ldots, v_n$ będą ustalonymi wektorami przestrzeni wektorowej X. Jeżeli każdy element przestrzeni X można wyrazić jako kombinację liniową wektorów $v_1, \ldots, v_n$, tzn. dla dowolnego $y \in X$

$$y = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \tag{4.2}$$

dla pewnych skalarów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, to mówimy, że wektory $v_1, \ldots, v_n$ **generują przestrzeń** X. Każdy liniowo niezależny układ (ciąg – istotna kolejność) wektorów przestrzeni wektorowej X generujący tę przestrzeń nazywamy **bazą** tej przestrzeni. Liczbę elementów bazy przestrzeni wektorowej X oznaczamy $\dim X$ i nazywamy **wymiarem** przestrzeni wektorowej ([2]).

Przykład 4.11. *Rozważmy przestrzeń liniową $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad ciałem liczb rzeczywistych. Dla dowolnego wektora $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mamy:*

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, ..., 0) + \ldots + (0, ..., 0, x_n)\\ &= x_1 (1, 0, \ldots, 0) + x_2 (0, 1, 0, ..., 0) + \ldots + x_n (0, ..., 0, 1) ,\end{aligned}$$

zatem wektory $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), \ldots, e_n = (0, ..., 0, 1)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^n$; ponieważ wektory te są również liniowo niezależne, więc stanowią one bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$ – jest to tzw. ***baza kanoniczna****. Wniosek:* $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Przykład 4.12. *Rozważmy przestrzeń liniową $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nad ciałem liczb rzeczywistych. Z postaci kanonicznej liczby zespolonej wynika, że każda liczba zespolona jest kombinacją liniową wektorów $1, i$; wektory te, w rozważanym przypadku (jaki to przypadek?), są liniowo niezależne, więc stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{C}$. Wniosek:* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Przykład 4.13. *Rozważmy przestrzeń liniową $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, tym razem nad ciałem liczb zespolonych. Niech $z_0 \neq 0$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Wówczas dla dowolnej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$:*

$$z = \alpha_0 z_0, \qquad \text{gdzie } \alpha_0 = z z_0^{-1}.$$

[2] W sytuacji, gdy nie jest jasne nad jakim ciałem rozważamy daną przestrzeń liniową X, jej wymiar oznaczać będziemy $\dim_F X$ wskazując, że jest to przestrzeń liniowa nad ciałem F.

Oznacza to, że w rozważanym przypadku z_0 *jest bazą przestrzeni* $\mathbb{C}$. *Wniosek:* $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

Ważnym wnioskiem wynikającym z dwóch ostatnich przykładów jest to, że **wymiar przestrzeni wektorowej zależy od ciała, nad którym przestrzeń ta jest rozważana**.

Przykład 4.14. *Niech* $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, x + y + z = 0\}$. *Łatwo wykazać, że* Y *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*; wyznaczmy więc jej bazę. Rozwiązując układ równań wynikający z warunku określającego przynależność do przestrzeni* Y*, otrzymamy:* $x = t, y = -t, z = 0$ $(t \in \mathbb{R})$. *Dowolny element przestrzeni* Y *ma więc postać:* $(t, -t, 0) = t\,(1, -1, 0)$. *Oznacza to, że* Y *jest jednowymiarową podprzestrzenią przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*, której bazą jest wektor* $(1, -1, 0)$.

Przykład 4.15. *Niech* Π_n *oznacza zbiór wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż* n. *Łatwo sprawdzić, że struktura* $(\Pi_n, +, \cdot)$*, gdzie* $+$ *oraz* $\cdot$ *to naturalne działania dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę, jest przestrzenią wektorową nad* $\mathbb{R}$. *Bazę tej przestrzeni tworzą jednomiany:* $1, x, x^2, \ldots, x^n$*; mamy więc:* $\dim \Pi_n = n + 1$.
Niech teraz, dla $a \in \mathbb{R}$,

$$\Pi_n\,(a) = \{w \in \Pi_n : w\,(a) = 0\}\,.$$

Łatwo wykazać, że $\Pi_n\,(a)$ *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* Π_n. *Z twierdzenia Bézout wynika, że dowolny element* $w \in \Pi_n\,(a)$ *można zapisać w postaci*

$$w\,(x) = (x - a)\,g\,(x)\,, \tag{4.3}$$

dla pewnego $g \in \Pi_{n-1}$. *Ponieważ bazą* Π_{n-1} *są jednomiany* $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$*, zatem na podstawie (4.3), wielomian* w *jest kombinacją liniową wielomianów*

$$x - a, x\,(x - a)\,, x^2\,(x - a)\,, \ldots, x^{n-1}\,(x - a)\,.$$

Wielomiany te są liniowo niezależne (dlaczego?), zatem stanowią bazę przestrzeni $\Pi_n\,(a)$. *Wniosek:* $\dim \Pi_n\,(a) = n$.

Ćwiczenie Wyznacz bazę przestrzeni $\Pi_n\,(a)$ w przypadku, gdy $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

Współczynniki $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ występujące w równaniu (4.2) nazywamy **współrzędnymi** wektora y w bazie $v_1, \ldots, v_n$. Współrzędne te są wyznaczone w sposób jednoznaczny. Aby to wykazać, przypuśćmy, że wektor y określony równaniem (4.2) można również zapisać w postaci

$$y = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n. \tag{4.4}$$

Pokażemy, że wówczas $\alpha_i = \beta_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Z zależności (4.2) i (4.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n - (\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) \\ &= (\alpha_1 - \beta_1)\,v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\,v_n. \end{aligned}$$

Liniowa niezależność wektorów $v_1, \ldots, v_n$ prowadzi do warunków $\alpha_i - \beta_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Własności bazy przestrzeni wektorowej:

(i) *Każda nietrywialna przestrzeń wektorowa posiada bazę.*

(ii) *Jeżeli wektory $v_1, \ldots, v_n$ są bazą pewnej przestrzeni liniowej, to dla dowolnych niezerowych skalarów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wektory $\alpha_1 v_1, \ldots, \alpha_n v_n$ również są bazę tej przestrzeni.*

(iii) *Wszystkie bazy tej samej przestrzeni wektorowej są równoliczne, tj. składają się z takiej samej liczby elementów.*

(iv) *Wektory $v_1, \ldots, v_n$ $n-$wymiarowej przestrzeni liniowej są jej bazą wtedy i tylko wtedy, gdy są wektorami liniowo niezależnymi.*

(v) *Każdy układ wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej X może być rozszerzony do bazy przestrzeni X.*