# Rozdział 7

# Wartości i wektory własne

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ będzie dowolną macierzą.

**Definicja 7.1.** *Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ nazywamy wartością własną macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbb{F}^n$, taki że*

$$Av = \lambda v;$$

*wektor $v$ nazywamy wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\lambda$.*

Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy $A$ oznaczamy $\sigma(A)$ i nazywamy **widmem** macierzy $A$. Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 7.1.** *Dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ następujące warunki są równoważne:*

*(a)* $\lambda$ *jest wartością własną* $A$*;*
*(b) układ równań* $(A - \lambda I)v = 0$ *ma niezerowe rozwiązanie;*
*(c)* $\det(A - \lambda I) = 0$.

Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ odwzorowanie $\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ jest wielomianem stopnia $n$, którego pierwiastkami są wartości własne macierzy $A$. Wielomian $\varphi_A$ nazywamy **wielomianem charakterystycznym** macierzy $A$.

**Uwaga** *Jeżeli elementy macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ należą do ciała $\mathbb{F}$, które jest **algebraicznie domknięte** (tzn. każdy wielomian stopnia $n$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$ ma $n$ pierwiastków w ciele $\mathbb{F}$) to macierz $A$ posiada $n$ wartości własnych liczonych z krotnościami. Jeżeli natomiast elementy macierzy są elementami ciała, które nie jest algebraicznie domknięte (takim ciałem jest na przykład ciało liczb rzeczywistych!), to macierz ta może nie mieć wartości własnych.*

Jeżeli $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \sigma(A)$ są wartościami własnymi macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ to wielomian $\varphi_A$ możemy zapisać w postaci

$$\varphi_A(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = a_n(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n).$$

Łatwo wówczas zauważyć, że:

- $\deg \varphi_A = n$;
- $a_n = (-1)^n$;
- $(-1)^{n-1} a_{n-1} = \lambda_1 + ... + \lambda_n = \operatorname{tr}(A)$, gdzie $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$ to **ślad** macierzy $A$;
- $a_0 = \det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

**Własności widma macierzy** $(A \in \mathbb{F}^{n\times n})$**:**

**a)** $\lambda \in \sigma(A),\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda^k \in \sigma\left(A^k\right)$;
**b)** $\lambda \in \sigma(A)$, $\det A \neq 0 \Rightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$;
**c)** $\lambda \in \sigma(A)$, $\alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow \alpha\lambda \in \sigma(\alpha A)$;
**d)** $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$ *(w szczególności:* $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda \in \sigma\left(A^T\right)$*);*
**e)** *różnym wartościom własnym macierzy odpowiadają liniowo niezależne wektory własne.*

**Ćwiczenie** Uzasadnić własności a)–d).

**Przykład 7.1.** *Wyznaczymy wartości oraz wektory własne macierzy*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

*Ponieważ* $\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda)$, *zatem macierz* $A$ *ma trzy różne wartości własne:* $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. *Dla każdej z nich wyznaczymy wektor własny:*

- *dla* $\lambda_1 = -1$ *mamy:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2y \\ 3y \\ -2x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  *skąd otrzymujemy* $(x,y,z) = (0,0,t)$, $t \in \mathbb{R}$*; przykładowy wektor własny* $v_{\lambda_1} = (0,0,1)$;
- *dla* $\lambda_2 = 1$ *mamy:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ y \\ -2x-2y-2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  *skąd otrzymujemy* $(x,y,z) = (t,0,-t)$, $t \in \mathbb{R}$*; przykładowy wektor własny* $v_{\lambda_2} = (1,0,-1)$;

- *dla* $\lambda_3 = 2$ *mamy:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2y \\ 0 \\ -2x-2y-3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*skąd otrzymujemy* $(x, y, z) = (2t, t, -2t)$, $t \in \mathbb{R}$*; przykładowy wektor własny* $v_{\lambda_3} = (2, 1, -2)$.

## 7.1. Twierdzenie Cayleya–Hamiltona

Niech $f \in \Pi_m$ będzie wielomianem postaci

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{7.1}$$

Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) możemy wówczas zdefiniować macierz $f(A)$ określoną w następujący sposób

$$f(A) := a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I.$$

**Definicja 7.2.** *Jeżeli dla wielomianu* $f$ *oraz macierzy* $A$ *zachodzi* $f(A) = 0$*, to wielomian ten nazywamy* ***wielomianem anihilującym*** *macierzy* $A$.

Przypomnijmy, że zbiór macierzy kwadratowych stopnia $n$ z naturalnymi działaniami dodawania macierzy oraz mnożenia macierzy przez skalar tworzy skończenie wymiarową przestrzeń wektorową ($\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{n \times n} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{n \times n} = n^2$; $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{n \times n} = 2n^2$). Oznacza to, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ istnieje liczba naturalna $N$ dla której macierze $I, A, A^2, \ldots, A^N$ są liniowo zależne. To z kolei oznacza, że istnieją skalary $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N$, nie wszystkie równe zero, dla których

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \ldots \alpha_N A^N = 0.$$

Na podstawie definicji 7.2, wielomian $f(x) = \alpha_N x^N + \alpha_{N-1} x^{N-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ jest wielomianem anihilującym macierzy $A$. Wynika stąd następujący wniosek.

**Wniosek 7.2.** *Każda macierz kwadratowa posiada wielomian anihilujący.*

Przedstawiona powyżej metoda konstrukcji takiego wielomianu nie jest wygodna w zastosowaniach. W tym świetle interesujące wydaje się następujące twierdzenie Cayleya–Hamiltona

**Twierdzenie 7.3.** *Wielomian charakterystyczny macierzy jest jej wielomianem anihilującym.*

**Przykład 7.2.** *Rozważmy macierz* $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ *postaci*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Wielomian* $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 1$ *jest jej wielomianem charakterystycznym, zatem*

$$A^2 - 3A - I = 0 \Leftrightarrow A(A - 3I) = I.$$

*Oznacza to, że*

$$A^{-1} = A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

## 7.2. Diagonalizowalność

Niech $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

**Definicja 7.3.** *Mówimy, że macierz $A$ jest podobna do macierzy $B$ (ozn. $A \sim B$) jeżeli istnieje macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, taka że*

$$A = PBP^{-1}. \tag{7.2}$$

Łatwo wykazać (ćwiczenie), że relacja podobieństwa macierzy jest relacją równoważności, tzn. jest:

- zwrotna, tj. $A \sim A$;
- symetryczna, tj. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$;
- przechodnia, tj. $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Przypuśćmy teraz, że $A \sim B$. Oznacza to, że $A = PBP^{-1}$, dla pewnej macierzy nieosobliwej $P$. Mamy:

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(PBP^{-1} - \lambda I\right) = \det P(B - \lambda I)P^{-1} \\ &= \det P \det(B - \lambda I) \det P^{-1} = \varphi_B(\lambda)\end{aligned}$$

co oznacza, że **macierze podobne mają ten sam wielomian charakterystyczny**; w konsekwencji mają one również identyczne wartości własne.

**Definicja 7.4.** *Macierz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ jest macierzą **diagonalizowalną**, jeżeli jest podobna do macierzy diagonalnej.*

Zanim podamy twierdzenie charakteryzujące macierze diagonalizowalne rozważmy następujący przykład.

**Przykład 7.3.** *Niech $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ będą macierzami postaci*

$$A_1 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Macierze te mają ten sam wielomian charakterystyczny*

$$\varphi_{A_1}(\lambda) = \varphi_{A_2}(\lambda) = (1 - \lambda)^2,$$

*a ich widma są jednoelementowe, tj.*

$$\sigma(A_1) = \sigma(A_2) = \{1\}.$$

*Dla macierzy $A_1$ możemy wyznaczyć dwa liniowo niezależne wektory własne, podczas gdy dla macierzy $A_2$ znajdziemy tylko jeden taki wektor. Ponadto, macierz $A_2$ nie jest diagonalizowalna. Jedyną macierzą diagonalną, do której macierz $A_2$ mogłaby być podobna, jest macierz jednostkowa (macierze podobne mają te same wartości własne). Musiałaby więc istnieć macierz nieosobliwa $P$ spełniająca warunek*

$$A_2 = PIP^{-1} = I,$$

*który nie jest prawdziwy.*

Możliwość diagonalizacji macierzy $A_1$ oraz brak możliwości diagonalizacji macierzy $A_2$ jest wynikiem tego, że dla macierzy $A_1$ możemy wybrać tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wynosi krotność wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego; dla macierzy $A_2$ warunek ten nie jest spełniony.

Prawdziwe jest następujące

**Twierdzenie 7.4.** *Macierz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy*

**a)** *jej wielomian charakterystyczny ma $n$ pierwiastków w ciele $\mathbb{F}$ (liczonych z krotnościami);*

**b)** *dla każdej wartości własnej macierzy $A$ można wybrać tyle wektorów własnych, ile wynosi krotność tej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.*

*Ponadto, jeżeli $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo niezależnymi wektorami własnymi macierzy diagonalizowalnej $A$ odpowiadającymi jej (niekoniecznie różnym) wartościom własnym $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, to macierz $P = [v_1 \ldots v_n]$ jest macierzą ustalającą podobieństwo pomiędzy macierzami $A$ oraz* $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *tj.:*

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

**Przykład 7.4.** *Niech $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ będzie macierzą postaci*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Ponieważ $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$, zatem macierz $A$ nie ma rzeczywistych wartości własnych – nie jest więc diagonalizowalna w klasie macierzy $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Ta sama macierz traktowana jako element przestrzeni $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ma dwie różne wartości własne $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, którym odpowiadają liniowo niezależne wektory własne równe odpowiednio $v_1 = (-i, 1)$ oraz $v_2 = (i, 1)$. Na podstawie twierdzenia 7.4, macierz*

$$P = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*ustala podobieństwo pomiędzy macierzami $A$ oraz* $\operatorname{diag}(i, -i)$; *faktycznie*

$$\begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$