Rozdział 8

Postać Jordana macierzy

8.1. Macierz Jordana

Niech $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Macierz $J_r(\lambda) \in \mathbb{F}^{r \times r}$ postaci

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{F}$, nazywamy **klatką Jordana** stopnia r. Oczywiście $J_1(\lambda) = [\lambda]$.

Definicja 8.1. *Macierz blokową $J \in \mathbb{F}^{n \times n}$ postaci*

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix},$$

gdzie $n_1 + \ldots + n_k = n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ oraz wszystkie niewypisane elementy macierzy J są zerami, nazywamy ***macierzą Jordana****.*

Skalary $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tworzące przekątną macierzy J są jej wartościami własnymi. Zauważmy również, że każda macierz diagonalna jest macierzą Jordana; wymiar każdej klatki Jordana J_{n_i} tworzącej przekątną tej macierzy jest równy jeden, tj. $J_{n_i} = [\lambda_i]$. Oznacza to, że każda macierz diagonalizowalna jest podobna do pewnej macierzy Jordana. Prawdziwe jest również dużo ogólniejsze

Twierdzenie 8.1. *Niech* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *będzie dowolną macierzą. Istnieje wówczas macierz nieosobliwa* $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *taka że*

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

oraz $n_1 + \ldots + n_k = n$. *Macierz Jordana* J *macierzy* A *jest wyznaczona w sposób jednoznaczny z dokładnością do kolejności klatek Jordana, które tworzą przekątną macierzy* J. *Ponadto, jeżeli macierz* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ma tylko rzeczywiste wartości własne to macierz* P, *ustalająca podobieństwo* A *oraz* J, *również może być wybrana jako macierz o elementach rzeczywistych.*

Przykład 8.1. *Niech*

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dla $\varepsilon \neq 0$. *Ponieważ* $\sigma(A_\varepsilon) = \{0, \varepsilon\}$ *zatem macierz* A_ε *jest diagonalizowalna. Łatwo wykazać, że*

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = S_\varepsilon J_\varepsilon S_\varepsilon^{-1}.$$

Oznacza to, że macierz

$$J_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

jest macierzą Jordana macierzy A_ε, *dla dowolnego* $\varepsilon \neq 0$. *Jednak, jeżeli* $\varepsilon \to 0$ *to* $J_\varepsilon \to [0]_{2\times 2}$, *podczas gdy macierzą Jordana macierzy* A_0 *jest macierz*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 8.1. *Macierz Jordana* J *wyznaczona dla macierzy* A *nie musi być funkcją ciągłą elementów macierzy* A. *Oznacza to trudności z konstrukcją numerycznie akceptowalnego algorytmu wyznaczania, dla zadanej macierzy* A, *odpowiadającą jej macierz Jordana.*

8.1.1. Własności macierzy Jordana

Niech $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ będzie dowolną macierzą, a $J \in \mathbb{F}^{n\times n}$ jej macierzą Jordana.

Własność 1 *Liczba* k *klatek Jordana tworzących macierz* J *jest równa liczbie liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy* A.

Własność 2 *Liczba klatek Jordana odpowiadających wartości własnej* λ *jest równa liczbie odpowiadających jej liniowo niezależnych wektorów własnych. Suma stopni wszystkich tych klatek równa jest krotności wartości własnej* λ *jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego macierzy* A.

Własność 3 *Liczba $N(m,\lambda)$ klatek Jordana stopnia $m \geq 1$ odpowiadających wartości własnej λ jest równa:*

$$N(m,\lambda) = r_{m-1}(\lambda) - 2r_m(\lambda) + r_{m+1}(\lambda), \tag{8.2}$$

gdzie $r_k(\lambda) = \operatorname{rank}(A - \lambda I)^k$.

Przykład 8.2. *Rozważmy macierz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ postaci*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ zatem macierz ma dwie wartości własne: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Wyznaczmy wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym. Mamy

- *dla $\lambda_1 = 1$:*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y \\ x+y \end{bmatrix},$$

skąd otrzymujemy $(x,y,z) = (0,0,t)$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; np. $v_{\lambda_1} = [0,0,1]^T$;

- *dla $\lambda_2 = 2$:*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ x+y-z \end{bmatrix},$$

skąd otrzymujemy $(x,y,z) = (t,0,t)$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; np. $v_{\lambda_2} = [1,0,1]^T$.

Dla macierzy A udało się więc wybrać tylko dwa liniowo niezależne wektory własne. Oznacza to, na podstawie własności 1, że macierz Jordana macierzy A składa się z dwóch klatek Jordana. Na podstawie własności 2, wartości własnej $\lambda_1 = 1$ odpowiada jedna klatka Jordana stopnia 1, wartości własnej $\lambda_2 = 2$ musi więc odpowiadać jedna klatka Jordana stopnia 2. Macierz Jordana macierzy A ma więc postać

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Do tego samego wniosku dojdziemy opierając się na własności 3 (ćwiczenie).

Pewną niedogodnością faktoryzacji (tj. rozkładu) Jordana $A = PJP^{-1}$ jest to, że w przypadku macierzy rzeczywistej posiadającej nierzeczywiste wartości własne jej macierz Jordana jest macierzą nierzeczywistą. W wielu zagadnieniach praktycznych, oznacza to konieczność poszukiwania innego rozkładu macierzy, nie tak prostego jak rozkład Jordana, ale prowadzącego do macierzy rzeczywistych.

Otwartym pozostaje również pytanie o sposób konstrukcji macierzy P ustalającej podobieństwo pomiędzy macierzami A oraz jej mecierzą Jordana J.

8.2. Wektory główne

Na potrzeby tego podrozdziału, wektor własny $v_\lambda^{(1)} \in \mathbb{F}^n$ macierzy A odpowiadający wartości własnej λ nazywać będziemy *wektorem głównym rzędu* 1. Wektory główne rzędu $k \geq 2$ zdefiniujemy indukcyjnie.

Definicja 8.2. *Przypuśćmy, że $v_\lambda^{(k-1)} \in \mathbb{F}^n$ jest wektorem głównym rzędu $k-1$ odpowiadającym wartości własnej λ. Jeżeli istnieje niezerowy wektor $v_\lambda^{(k)} \in \mathbb{F}^n$ będący rozwiązaniem równania*

$$(A - \lambda I)\, v_\lambda^{(k)} = v_\lambda^{(k-1)}, \tag{8.3}$$

*to wektor ten nazywamy **wektorem głównym rzędu** k odpowiadającym wartości własnej λ.*

8.2.1. Własności wektorów głównych

Wymienione poniżej własności wektorów głównych umożliwią wyznaczanie macierzy Jordana J zadanej macierzy A oraz macierzy P ustalającej podopodobieństwo między nimi.

- *Dla każdej wartości własnej istnieją wektory główne rzędu co najmniej 1.*
- *Wektory główne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.*
- *Wektory główne różnych rzędów odpowiadające tej samej wartości własnej są liniowo niezależne.*
- *Dla wartości własnej λ o krotności r (krotności jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego) istnieje dokładnie r liniowo niezależnych wektorów głównych; wśród nich są wszystkie liniowo niezależne wektory własne odpowiadające wartości własnej λ.*
- *Liniowo niezależne wektory główne macierzy A, traktowane jako kolumny pewnej macierzy nieosobliwej, możemy ustawić w takiej kolejności, aby utworzyły macierz P ustalającej podobieństwo pomiędzy macierzami A oraz jej macierzą Jordana J, tj. $P^{-1}AP = J$.*

Przykład 8.3. *Rozważmy ponownie macierz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ z przykładu, tj.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.4}$$

Macierz A ma dwie różne wartości własne: $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = 2$. Wyznaczymy dla tych wartości własnych wektory główne.

- *Dla $\lambda_1 = 1$, rozwiązując równanie*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy: $x = y = 0, z \in \mathbb{R}$*; wektor główny rzędy* 1 *ma więc postać* $v_{\lambda_1}^{(1)} = (0,0,t)\,,\ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*. Aby wyznaczyć wektory główne rzędu* 2 *rozważmy, dla ustalonego* $t \neq 0$*, równanie*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

Łatwo stwierdzić, że równanie to nie posiada rozwiązań. Oznacza to, że dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$ *nie istnieją wektory główne rzędu* $k \geq 2$*.*

- *Dla* $\lambda_2 = 2$*, rozwiązując równanie*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy: $x = z, y = 0$*; wektor główny rzędy* 1 *ma więc postać* $v_{\lambda_2}^{(1)} = (t,0,t)\,,$ $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*. Aby wyznaczyć wektory główne rzędu* 2*, rozważmy, dla ustalonego* $t \neq 0$*, równanie*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

Jego rozwiązaniem jest $x = z, y = t$*; wektor główny rzędu* 2 *ma więc postać* $v_{\lambda_2}^{(2)} = (r,t,r)\,, r \in \mathbb{R}$*. Zauważmy, że postać wektora* $v_{\lambda_2}^{(2)}$ *zależy od sposobu wyboru wektora* $v_{\lambda_2}^{(1)}$*. Aby wyznaczyć wektory główne rzędu* 3*, rozważmy, dla ustalonych* $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,,\ r \in \mathbb{R}$*, równanie*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ t \\ r \end{bmatrix}.$$

Łatwo stwierdzić, że równanie to nie posiada rozwiązań, a tym samym nie istnieją dla wartości własnej $\lambda_2 = 2$ *wektory główne rzędu* $k \geq 3$*.*

Podsumowując, dla macierzy A *postaci (8.4) udało się wyznaczyć trzy liniowo niezależne wektory główne: jeden odpowiadający wartości własnej* λ_1 *oraz dwa odpowiadające wartości własnej* λ_2*. Przyjmując na przykład* $t = r = 1$*, otrzymujemy*

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= (0,0,1)\,, \\ v_2^{(1)} &= (1,0,1)\,, \\ v_3^{(2)} &= (1,1,1)\,. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla macierzy $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$*, której kolumnami są wektory* $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}$*, tj.*

$$P = \left[v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

mamy

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J.$$

Macierz P jest więc macierzą ustalającą podobieństwo między macierzą A oraz jej macierzą Jordana.