Zadanie 1. Korzystając z definicji granicy ciągu, sprawdź równości:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+2} = 0, \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n+1} = +\infty, \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{2n^2+1} = 2.$$

Zadanie 2.* Uzasadnij, że nie istnieją granice ($n \in \mathbb{N}$):

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} (1-n)^n\,; \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,; \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \sin n.$$

Zadanie 3. Stosując twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym, zbadaj zbieżność podanych ciągów:

a) $a_n = \frac{2^n}{n!}$;

b) $b_1 = b > 0$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{1+b_n}$;

c) $c_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{2^n}\right)$;

d) $d_1 = d > 0$, $d_{n+1} = \ln(1+d_n)$;

e) $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

f) $f_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$.

Zadanie 4. Wyznacz granice podanych ciągów ($n \to +\infty$):

a) $\frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}$; b) $\sqrt{n^2+n} - \sqrt[4]{n^4+1}$; c) $\frac{1+2+\ldots+n}{n^3+1}\cos n!$;

d) $\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$; e) $n\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}} - 1\right)$; f) $\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$;

g) $\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{6n}$; h) $\left(\frac{4n}{4n+1}\right)^n$; i) $(0,\underbrace{9\ldots9}_{\times n})^{10^n}$;

j) $\left[\frac{3n+1}{n+1}\right]$; k) $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{x}{2^n}$; l) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}$;

m) $n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$, $a > 0$; n) $\left(1+\frac{n+1}{2-n}\right)^n$; o) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k-1)(x+k)}$, $x > 0$.

Zadanie 5. Stosując twierdzenie o trzech ciągach, wyznacz podane granice:

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2 n + 4n}{3n-1}$; b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}$;

c) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n}{n+1}}$; d) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1+n^2}+\ldots+\frac{1}{n+n^2}\right)$;

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{2}{2+n^2}+\ldots+\frac{n}{n+n^2}\right)$; f) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\frac{1}{n}}$;

g) $\lim_{n\to\infty}\frac{[\sqrt{2}n]}{n}$; h) $\lim_{n\to\infty}(2\cos n - 5)\,n^2$;

i) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; j) $\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2(2^n+1)}{\log_2(4^n+1)}$.

Zadanie 6. Znajdź granicę L ciągu obwodów L_n oraz granicę S ciągu pól S_n wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu r, gdy liczba boków wielokątów n wzrasta do nieskończoności.

Zadanie 7. Odcinek AB o długości d podzielono na n równych części. Na każdej z nich, z pominięciem pierwszej i ostatniej, zbudowano równoboczne trójkąty. Oblicz granicę pól S_n i obwodów P_n otrzymanej figury granicznej (przy $n \to \infty$).

Zadanie 8. W stożek obrotowy o wysokości h i promieniu podstawy r wpisano ostrosłup prawidłowy w ten sposób, że wysokość ostrosłupa jest jednocześnie wysokością stożka, a podstawą ostrosłupa jest n–kąt foremny wpisany w podstawę stożka. Przez S_n oraz V_n oznaczono odpowiednio pole powierzchni całkowitej oraz objętość tak utworzonego ostrosłupa. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$.

Zadanie 9. Uzasadnij, że nie istnieją granice ($x \in \mathbb{R}$):

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x}, \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} (\sin x - \cos x)\,, \quad \text{c) } \lim_{x\to+\infty} \sin 2\pi x, \quad \text{d)* } \lim_{x\to+\infty} \sin[x] \quad .$$

Zadanie 10.* Uzasadnij równości:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \tfrac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad \text{c) } \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Zadanie 11. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1},\, n\in\mathbb{N}$ c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(\arcsin x)^2}{1-x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(\arccos x)^2}{1-x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x},\, m\in\mathbb{R}$ f) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{8-x}{\sin(\frac{1}{8}\pi x)}$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+\sin x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{\frac{1}{x}}$.

j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(-2)^{[x]}}{x}$ k) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2^x-x^2}{x-2}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$

m) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\ln(2^x+1)}{\ln(3^x+1)}$ n) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg}^3 \sqrt{x}}{x}$ o) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$