Zadanie 1. Stosując tw. Lagrange'a uzasadnij nierówności:

a) $e^x > 1 + x$, dla $x > 0$;

b) $|\ln(1+x) - \ln(1+y)| \leqslant |x - y|$, dla $x, y > 0$;

c) $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$, dla $0 < a < b, n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 2. Uzasadnij, że symbolom

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \tfrac{0}{0}, \quad \tfrac{\infty}{\infty}, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0$$

nie można przypisać żadnej ustalonej wartości liczbowej (ani nieskończoności).

Zadanie 3. Oblicz poniższe granice; jeżeli to możliwe zastosuj regułę de l'Hospitala:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^x$ g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

Zadanie 4. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema (lokalne) funkcji:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 15x - 15$, b) $y = x^2 e^{-x}$ c) $y = \frac{x}{x^2+1}$,

d) $y = x^x + [x+1]^x + x^{[x]} + [x+1]^{[x]}$, e) $y = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$, f) $y = \sqrt{\ln\cos(2\pi x)}$

g) $y = \arcsin\frac{x}{|x|-1}$ h) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$, i) $y = \ln\left(\log_x \ln x\right)$.

Zadanie 5. Uzasadnij nierówności (wykorzystaj monotoniczność stosownie dobranej funkcji):

a) $e^x > x + 1$, dla $x > 0$;

b) $\frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{\operatorname{tg} y}{y}$, dla $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$;

c) $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, dla $x \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ (tzw. nierówność Bernoulliego);

d) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} > e$, dla $x > 0$.

Zadanie 6. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji w zadanym przedziale:

a) $y = \sin 2x - x$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, b) $y = \begin{cases} x^3 \ln|x| & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$, $[-e, e]$

c) $y = x + \sqrt{|x|}$, $[-1, 1]$, d) $y = xe^{-x}$, $[0, \infty)$.

Zadanie 7. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

a) $y = x + 2\operatorname{arctg} x$, b) $y = \frac{1-x^3}{x^2}$,

c) $y = xe^{x^3}$, d) $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}$.

Zadanie 8. Wyznacz kąty przecięcia się krzywych:

a) $y = 4 - x$ i $y = 4 - 0.5x^2$;

b) $y = \sin x$ i $y = \cos x$;

c) $y = e^x$ i $x = 0$;

d) $x^2 + y^2 = r^2$ i $y = 1$, $(r \geq 1)$.

Zestaw 9. Dla funkcji f napisz wzór Taylora w otoczeniu punktu x_0 do rzędu n, tj. z resztą $r_n(f, x) = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}(x - x_0)^n$:

a) $y = \sin x$, $x_0 = 0$, $n = 5$;

b) $y = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$, $n = 4$;

c) $y = \exp(ax)$, $x_0 = 0$, $n = N + 1$;

d) $y(b) = (a + b)^4$, $x_0 = b_0 = 0$, $n = 4$.

Zadanie 10. Oszacuj dokładność proponowanych przybliżeń:

a) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, dla $|x| < \frac{\pi}{6}$;

b) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{1}{3}x^3$, dla $|x| < \frac{1}{10}$;

c) $\ln(1 + x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$, dla $|x| < \frac{1}{10}$;

d) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{4}$, dla $|x| < \frac{1}{10}$.

Zadanie 11. Uzasadnij nierówności (zapisując, dla stosownie dobranej funkcji, wzór Taylora odpowiedniego rzędu):

a) $e^x > x + 1$, dla $x > 0$;

b) $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$, dla $x \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$;

c) $(1 + x)^{1+x} \geq 1 + x + x^2$, dla $x \geq 0$;

d) $\sin x < x$, dla $x > 0$.

Zadanie 12. Oblicz wartość poniższych wyrażeń z zadaną dokładnością:

a) e, $d = 10^{-3}$; b) $\sin 10^\circ$, $d = 10^{-2}$; c) $\sqrt[3]{1.003}$, $d = 10^{-3}$;

d) $\cos 0.2$, $d = 10^{-4}$; e)* $0,98^{1,01}$, $d = 10^{-2}$ f)* $(1.01)^{0.51}$, $d = 10^{-1}$.