Zadanie 1. Oblicz całki:

a) $\int \frac{(x^2-1)^3}{x} dx$; b) $\int \left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3 dx$; c) $\int \frac{x-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}} dx$; d) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$;

e) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$; f) $\int \frac{\sqrt{u^3}+1}{\sqrt{u}+1} du$; h) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$; i) $\int \frac{e^{4x}-1}{e^x-1} dx$.

Zadanie 2. Stosując wzór na całkowanie przez podstawienie, oblicz całki:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{3-5x^2}} dx$; b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$; c) $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+11} dx$ d) $\int \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} dx$;

e) $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$; f) $\int \sqrt{3x+7} dx$; h) $\int \sin^m x \cos^3 x dx$, $m \in \mathbb{N}$; i) $\int \cos^{2n+1} x dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3. Stosując wzór na całkowanie przez części, oblicz całki:

a) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$; b) $\int \ln(x+1) dx$; c) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$;

d) $\int x (\operatorname{arctg} x)^2 dx$; e) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$; f) $\int x^2 \ln(1+x) dx$;

h) $\int \sin(\ln x) dx$; i) $\int (\arccos x)^3 dx$; j) $\int \cos x \ln(\operatorname{ctg} x) dx$.

Zadanie 4. Oblicz całki z funkcji wymiernych:

a) $\int \frac{1}{(x+2)(x-5)} dx$; b) $\int \frac{4x-1}{x^2-x-2} dx$; c) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$;

d) $\int \frac{1}{x^4-x^2} dx$; e) $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} dx$; f) $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} dx$;

g) $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$; h) $\int \frac{2x+1}{(1-x^2)(1+x)} dx$; i) $\int \frac{dx}{2x^2-x+1}$.

Zadanie 5. Oblicz całki trygonometryczne:

a) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$; b) $\int \sin 2x \cos 4x dx$; c) $\int \frac{dx}{1+4\cos x}$; d) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$;

e) $\int \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} dx$; f) $\int \frac{(2\sin x+3\cos x)}{\sin^2 x \cos x + 9\cos^3 x} dx$; g) $\int \sin x \sin 3x dx$; h) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx$.

Zadanie 6. Oblicz całki funkcji niewymiernych:

a) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}} dx$ b) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{x+1} dx$ c) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$ d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x-7}}$

e) $\int \sqrt{x^2+4} dx$ f) $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{1+x^2}}$ h) $\int \frac{x^3+x^2+1}{\sqrt{x^2-9}} dx$ i) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}} dx$

j) $\int \sqrt{\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}} dx$ k) $\int \frac{\sqrt{1+x}(x^2-1)}{\sqrt{1-x}} dx$ l) $\int \frac{2x^2+x+2}{\sqrt{1+x^2}} dx$ m) $\int \frac{-\sin 4x}{\sqrt{6+2\cos 2x}} dx$.

Zadanie 7. Oblicz całki:

a) $\int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x dx$; b) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2-1)^2} dx$; c) $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)} dx$; d) $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx$.

Zadanie 8. Wyprowadź wzory rekurencyjne (względem n) na podane całki:

a) $\int x^\alpha \ln^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$; b) $\int \sin^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$; c) $\int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 9.* Dla całek postaci $\int x^p \left(ax^q+b\right)^r dx$, gdzie $p,q,r\in\mathbb{Q}$ stosuje się następujące podstawienia:

- jeżeli $r\in\mathbb{Z}$ – podstawiamy $x=t^s$, gdzie s to najmniejszy wspólny mianownik ułamków p i q;
- jeżeli $\frac{p+1}{q}\in\mathbb{Z}$ – podstawiamy $ax^q+b=t^s$, gdzie s – mianownik r;
- jeżeli $\frac{p+1}{q}+r\in\mathbb{Z}$ – podstawiamy $a+\frac{b}{x^q}=t^s$, gdzie s – mianownik ułamka r.

Stosując powyższe podstawienia oblicz całki:

a) $\int\sqrt{x^3+x^4}dx$; b) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$; c) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Przydatne wzory

$$\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)x+\sin\left(a-b\right)x\right]$$
$$\sin ax\sin bx=\frac{1}{2}\left[\cos\left(a-b\right)x-\cos\left(a+b\right)x\right]$$
$$\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}\left[\cos\left(a+b\right)x+\cos\left(a-b\right)x\right]$$