I. Pole figury płaskiej:

a) Niech Γ oznacza krzywą o parametryzacji $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, gdzie $x \in C^1([t_1, t_2])$, $y \in C([t_1, t_2])$. Wówczas pole ograniczone krzywą Γ oraz prostymi $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} \left| y(t) x'(t) \right| dt. \tag{1}$$

b) Niech Γoznacza krzywą o parametryzacji $r = f(\theta)$, gdzie $f \geq 0$, $f \in C([\alpha, \beta])$ oraz $0 < \beta - \alpha < 2\pi$. Wówczas pole obszaru ograniczonego łukiem f oraz promieniami wodzącymi o amplitudach α, β wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 \, d\theta. \tag{2}$$

Zadanie 1. Oblicz pola figur ograniczonych podanymi krzywymi:

- **a)** $y = x^2 - 6x + 7$ oraz $y = 3 - x$;
- **b)** $x(t) = a\cos(t)$, $y(t) = b\sin(t)$; $t \in [0, 2\pi]$,
- **c)** $x(t) = a(2\cos(t) - \cos(2t))$, $y(t) = a(2\sin(t) - sin(2t)$; $t \in [0, 2\pi]$,
- **d)** $r(\phi) = a\cos(\phi)$, dla $0 \leq \phi \leq 2\pi$;
- **e)** $r(\phi) = a(1 + \cos\phi)$, dla $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

II. Długość krzywej:

a) Niech Γ będzie krzywą bez punktów wielokrotnych o parametryzacji $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$ gdzie $x, y \in C^1([t_1, t_2])$. Wówczas długość łuku Γ wyraża się wzorem:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt; \tag{3}$$

b) Niech Γ będzie krzywą bez punktów wielokrotnych o parametryzacji $r = f(\theta)$, $f \in C^1([\alpha, \beta])$. Wówczas długość łuku Γ wyraża się wzorem:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta. \tag{4}$$

Zadanie 2. Oblicz długości podanych krzywych:

- **a)** $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$;
- **b)** $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$;
- **c)** $r(\phi) = a(1 + \cos\phi)$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

III. Objetość bryły obrotowej:

Niech Γoznacza krzywą o parametryzacji $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, gdzie $x \nearrow$ lub $x \searrow$, $x, y \in C^1([t_1, t_2])$, $y \geq 0$. Wówczas objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót Γ dookoła osi Ox w przedziale $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) \, dt. \tag{5}$$

IV. Pole powierzchni bryły obrotowej:

Niech Σ oznacza krzywą oparametryzacji $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, gdzie $x \nearrow$ lub $x \searrow$, $x, y \in C^1([t_1, t_2])$, $y \geq 0$. Wówczas pole powierzchni bocznej bryły obrotowej powstałej przez obrót Σ dookoła osi Ox w przedziale $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \tag{6}$$

Zadanie 3. Wyznacz objętość oraz pole powierzchi (całkowitej) podanych figur:

a) kuli o promieniu R;

b) walca o wysokości h i promieniu R;

c) stożka o wysokości h i promieniu R;

d) obrotowego stożka ściętego o promieniach podstaw r_1 oraz r_2 i wysokości h.

Zadanie 4. Oblicz pola powierzchni powstałych przez obrót dookoła osi Ox krzywych o równaniach:

a) $y^2 = 4ax$, $0 \leq x \leq 3a$;

b) $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ $(a < b)$;

c) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

d) $x(t) = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y(t) = a(2\sin t - \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$;

e) $x(t) = a(\cos t + t\sin t)$, $y(t) = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

V. Zastosowanie całek w fizyce*

Zadanie 5.

a) Jaką pracę należy wykonać, aby ciało o masie m podnieść z powierzchni Ziemi na wysokość h?

b) Oblicz moment bezwładności prostokąta o bokach a i b względem boku a, przyjmując stała gęstość powierzchniową ρ.

c) Oblicz moment statyczny względem osi Ox łuku paraboli $y = \sqrt{2px}$, $0 \leq x \leq 2$.

d) Wyznacz środek ciężkości stożka obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h.

e) Ciało wykonuje drgania wzdłuż osi Ox z szybkością $v(t) = v_0 \cos \omega_o t$, gdzie v_0, ω_0 są stałymi. Znajdź położenie ciała w chwili t_2, jeżeli w chwili t_1 znajdowało się ono w punkcie x_1.