Zadanie 1. Przedstaw graficznie dziedziny (naturalne) podanych funkcji:

a) $f(x,y) = \frac{1}{(x-2)(y+1)}$ b) $f(x,y) = \log_{x^2+y^2}\left(4-x^2-y^2\right)$, c) $f(x,y) = \sqrt{\ln\cos(x-y)}$.

Zadanie 2. Wyznacz poniższe granice:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy^2}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{|x|+|y|}$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \left(x^y+y\right)^{\frac{1}{y}}$ g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x|^y$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2-1}{(y-2)^2}$ j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(x\sin y)}{xy+y^2}$ k) $\lim\limits_{(x,y)\to\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} \frac{\cos xy}{\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2}$ l) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2z^2\right)}{x}$

Zadanie 3. Zbadaj ciągłość podanych funkcji:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin xy}{e^{xy}-1} & \text{dla } xy \neq 0 \\ 0 & \text{dla } xy = 0 \end{cases}$ b) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^4+y^2} & \text{dla } x > 0 \\ x\cos x + y & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$.

Zadanie 4. Wyznacz wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których podane funkcje są ciągłe:

a) $f(x,y) = \begin{cases} (ax+b)\frac{\sin y}{y} & \text{dla } y \neq 0 \\ x & \text{dla } y = 0 \end{cases}$ b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+ay)}{x-y} & \text{dla } x \neq y \\ x^2 & \text{dla } x = y \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-1} & \text{dla } x^2+y^2 \geq 1 \\ ax+by & \text{dla } x^2+y^2 < 1 \end{cases}$ d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{b\sin axy}{xy} & \text{dla } xy \neq 0 \\ a & \text{dla } xy = 0 \end{cases}$.

Zadanie 5. Zbadaj różniczkowalność (w sensie Frécheta) podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = x^2+x+1$, $x_0 = 1$;

b) $f(x,y) = x^2y + y^2x$, $(x_0,y_0) = (0,1)$;

c) $f(x,y) = (x+y)^2(x-y)^2$, $(x_0,y_0) = (1,-1)$;

d) $f(x) = \left(x, x^2+x, 2x-1\right)$, $x_0 = 1$;

e) $f(x,y) = \left(xy, x^2+y^2\right)$, $(x_0,y_0) = (-1,2)$.

Zadanie 6. Wyznacz pochodne cząstkowe f'_x oraz f'_y podanych funkcji:

a) $f(x,y) = x^{y^x}$,

b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$,

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

d) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$,

e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^3}{x^2-y^2} & \text{dla } |x| \neq |y| \\ 0 & \text{dla } |x| = |y| \end{cases}$,

f) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{dla } xy = 0 \\ 1 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases}$,

g) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sin(x^2y)}{x^2y^2} & \text{dla } xy \neq 0 \\ 1 & \text{dla } xy = 0 \end{cases}$,

h) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } xy = 0 \\ 0 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases}$.

Zadanie 7. Zbadaj różniczkowalność podanych funkcji:

a) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$;

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

d) $f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Zadanie 8. Sprawdź, czy poniższe funkcje spełniają warunek $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0)$:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Zadanie 9. Wyznacz pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach oraz kierunkach:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $\overrightarrow{v} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$;

b) $f(x,y) = x\ln y + y\ln x$, $(x_0,y_0) = (1,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,0)$;

c) $f(x,y) = |x-y|$, $(x_0,y_0) = (1,1)$, $\overrightarrow{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$;

d) $f(x,y) = 2|x| + |y|$, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $\overrightarrow{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.