Zadanie 1. Dla podanych funkcji wyznacz:

a) $df_1(h)$, gdzie $f(x) = \ln|x| + \operatorname{arctg} x$;

b) $df_{(1,1)}(h_1, h_2)$, gdzie $f(x, y) = x \ln y + x^y$;

c) $df_{(0,0,0)}(h_1, h_2, h_3)$, gdzie $f(x, y, z) = xyz + x^2yz^2 + \ln(x + y + z + 1)$;

d) $d^2f_{(0,0)}(h_1, h_2)$, gdzie $f(x, y) = xy + x^3 \ln(y + 1) + y^4 \operatorname{tg} x$.

Zadanie 2. Dla podanych funkcji zapisz rozwinięcie Taylora do rzędu n w otoczeniu punktu A:

a) $f(x, y) = x^2y + xy + y^3$, $n = 3$, $A = (0, 1)$;

b) $h(x, y, z) = (x + y + z)^3$, $n = 3$, $A = (0, 0, 0)$;

c) $g(x, y, z) = xy \ln z + x^z \cos y$, $n = 2$, $A = (1, 0, 1)$;

d) $k(x, y, z) = x^{y^z}$, $n = 2$, $A = (1, 1, 1)$.

Zadanie 3. Korzystając z rozwinięcia Taylora (do rzędu drugiego), oblicz przybliżone wartości podanych wyrażeń:

a) $\frac{\operatorname{arctg} 0{,}9}{\sqrt{4{,}02}}$;

b) $1,02 \sin\left(\frac{\pi}{6} + 0,1\right)$;

c) $0,98^{1,01}$;

d) $\ln(1,05) \operatorname{tg}(46°)$.

Zadanie 4. Wyznacz ekstrema lokalne podanych funkcji:

a) $f(x, y) = 3(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2$;

b) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;

c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

d) $f(x, y) = e^{-\left(x^2+y^2+2x\right)}$;

e) $f(x, y) = xy$;

f) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$.

Zadanie 5. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w podanych obszarach:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $|x| + |y| \leqslant 2$;

b) $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ w trójkącie ograniczonym osiami Ox, Oy oraz prostą $x + y = 2\pi$;

c) $f(x, y) = xy$, $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.

Zadanie 6. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x, y) = \frac{axy}{x^2+y^2}$ $(a \in \mathbb{R})$.

Zadanie 7. Oblicz odległość początku układu współrzędnych od:

a) płaszczyzny $\pi : x - 2y + 3z - 6 = 0$;

b) powierzchni $\gamma : z = \sqrt{(x + 2)(y - 1)}$.

Zadanie 8. Spośród wszystkich trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu r wybierz ten o największym polu.

Zadanie 9. Znajdź największą wartość iloczynu trzech nieujemnych liczb, których suma ma stałą wartość równą $3c$.

Zadanie 10. Znajdź najmniejszą wartość sumy trzech dodatnich liczb, których iloczyn ma stałą wartość równą c^3.

Zadanie 11. Wyznacz ekstrema lokalne podanych funkcji przy zadanych warunkach:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 2$, $2x^2 + y^2 = 4$;
b) $f(x,y) = \ln x + \ln y + xy$, $x^2y^2 - x^4 - 1 = 4x^3 + 6x^2 + 4x$;
c) $f(x,y) = x + y$, $e^{x+y} - xy - 1 = 0$;
d) $f(x,y) = y - \ln x$, $x^2 + (y-2)^2 - 2 = 0$
e) $f(x,y) = x + 2y$, $x^2 + y^2 = 5$;
f) $f(x,y,z) = x + y + 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
g) $f(x,y,z) = xyz$, $x + y + z = a$, $(a > 0)$;
h) $f(x,y,z) = x + y + z$, $xyz = a$, $(a > 0)$.

Zadanie 12. Zbadaj, czy podane równanie jednoznacznie określa ciągłą funkcję uwikłaną $y = y(x)$ w otoczeniu wskazanych punktów:

a) $x^3 + x - y^3 - y = 0$, $(2,2)$;
b) $x^y = y^x$, $A(2,4)$, $B(e,e)$, $C(3,3)$;
c) $x - \sin y = 0$, $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$;
d) $x^2 = y^2$, $A(1,1)$, $B(0,0)$.

Zadanie 13. Wyznacz styczne do krzywych we wskazanych punktach:

a) $x^3 + x - y^3 - y = 0$, $A(2,2)$;
b) $x^2 + y^2 - 3xy + x = 0$, $B(1,1)$;
c) $xe^y + ye^x = e^{xy}$, $C(1,0)$.

Zadanie 14. Dla podanych funkcji uwikłanych $y = y(x)$ wyznacz $y''(x)$:

a) $F(x,y) = 0$, dla funkcji F mającej ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu;
b) $x^2 + y^2 - 3xy = 0$;
c) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;
d) $xe^y - y + 1 = 0$.

Zadanie 15. Wykorzystując wzór Taylora znajdź przybliżenie podanej funkcji uwikłanej $y = y(x)$ wielomianem stopnia n w otoczeniu punktu (x_0, y_0):

a) $e^{xy} - x^2y - 1 = 0$, $n = 2$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$;
b) $e^{xy} - x = 0$, $n = 2$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$;
c) $x^4 + \frac{4}{y^2} + \frac{4x^2}{y} - 1 = 0$, $n = 3$, $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

Zadanie 16. Znajdź ekstrema podanych funkcji uwikłanych y zmiennej x:

a) $x^2 + y^2 - 3axy = 0$, $(a \in \mathbb{R})$;
b) $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$;
c) $x^5 + y^4 = 20xy^2$;
d) $x^2e^y - y^4 + 1 = 0$;
e) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 4 = 0$.