

**Zadanie 1.** Oblicz poniższe całki po podanych zbiorach:

- a)  $\iint_R \frac{dx dy}{(x+y+1)^3}$ ,  $R = [0, 2] \times [0, 1]$ ;
- b)  $\iint_R xy \ln \frac{x}{y} dx dy$ ,  $R = [1, e] \times [1, 2]$ ;
- c)  $\iint_R e^{x-y} dx dy$ ,  $R$  – trójkąt o wierzchołkach  $(1, 0)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(2, 2)$ ;
- d)  $\iint_R x \sin(xy) dx dy$ ,  $R$  – trójkąt o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$ ;
- e)  $\iiint_R \frac{dx dy dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$ ,  $R = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$ ;
- f)  $\iiint_R z^2 e^{x-y} dx dy dz$ ,  $R$  – czworościan o wierzchołkach  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ .

**Zadanie 2.** W podanych całkach zamień kolejność całkowania:

- a)  $\int_{-1}^1 \int_0^{|x|} f(x, y) dy dx$ ;
- b)  $\int_0^4 \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$ .

**Zadanie 3.** Oblicz podane całki wprowadzając współrzędne biegunowe:

- a)  $\iint_D xy dx dy$ ,  $D = \{(x, y) : x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ ;
- b)  $\iint_D x^2 + y^2 dx dy$ ,  $D = \{(x, y) : y \geq 0, y \leq x^2 + y^2 \leq x\}$ .

**Zadanie 4.** Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

- a)  $y^2 = 4x$ ,  $x + y = 3$ ,  $y = 0$ ;
- b)  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 4y = 0$ .

**Zadanie 5.** Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

- a)  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ,  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 0$ ;
- b)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ .

**Zadanie 6.** Całkę potrójną  $\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz$  zamień na całkę iterowaną, jeżeli  $U$  jest obszarem ograniczonym przez powierzchnie:

- a)  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 6$ ;
- b)  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ,  $z = 4$  ( $z \geq 4$ );
- c)  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$ .

**Zadanie 7.** Wprowadzając współrzędne walcowe lub sferyczne oblicz podane całki:

a)  $\iiint_U (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz, U: x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1;$

b)  $\iiint_U xyz dx dy dz, U: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2};$

c)  $\iiint_U x^2 + y^2 dx dy dz, U: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz (R > 0);$

d)  $\iiint_U \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, U: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9;$

e)  $\iiint_U x^2 dx dy dz, U: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4x.$