Zadanie 1. Oblicz podane całki krzywoliniowe (nieskierowane):

a) $\int\limits_K ye^{-x}dl$, gdzie K jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach: $A(0,0)$, $B(-1,1)$, $C(1,1)$;

b) $\int\limits_K \sqrt{x^2+y^2+4}dl$, gdzie K jest krzywą: $x(t)=2t\cos t$, $y(t)=2t\sin t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$;

c) $\int\limits_K x-ydl$, gdzie $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2y-x+2=0,\ x\in[0,4]\right\}$;

d) $\int\limits_K 4\sqrt{y}dl$, gdzie K jest łukiem paraboli $y=(x+1)^2$, $x\in[-1,1]$;

e) $\int\limits_K dl$, gdzie K jest krzywą powstałą w wyniku przecięcia się powierzchni $4z^2=x^2+y^2$ oraz $x^2+y^2+5z^2=9$ (dla $z\geq 0$).

Zadanie 2. Oblicz podane całki krzywoliniowe (skierowane):

a) $\int\limits_K xdx+ydy$, gdzie K jest zorientowanym dodatnio brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,0)$;

b) $\int\limits_K \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, gdzie K jest elipsą $\frac{x^2}{4}+y^2=4$ zorientowaną ujemnie;

c) $\int\limits_K xe^ydx+ye^xdy$, gdzie K jest łukiem paraboli $x=y^2$, $y\in[-1,1]$ zorientowanym od punktu $(1,-1)$ do punktu $(1,1)$;

d) $\int\limits_K zdx+ydz+xdy$, gdzie K jest łukiem przestrzennym $x(t)=t^2+1$, $y(t)=t^2-1$, $z(t)=t$, $t\in[0,1]$ zorientowanym od punktu $(2,0,1)$ do punktu $(1,-1,0)$;

e) $\int\limits_K x^2y^2dx$, gdzie K jest brzegiem kwadratu $|x|+|y|\leq 4$ zorientowanym dodatnio.

Zadanie 3. Oblicz podane całki; jeżeli to możliwe zastosuj twierdzenie Greena:

a) $\int\limits_K ydx+(x+y)dy$, gdzie K jest zorientowanym dodatnio brzegiem figury ograniczonej krzywymi: $x=\sqrt{y}$, $x=0$, $y=4$;

b) $\iint\limits_G x^2+y^2dxdy$, gdzie $G=\left\{(x,y) : 1\leq x\leq 2, \leq x^2\leq y\leq e^x\right\}$;

c) $\int\limits_K xydx+\left(\frac{1}{2}x^2+\cos y\right)dy$, gdzie K jest krzywą o parametryzacji

$$\begin{cases} x(t)=\sin t \\ y(t)=\frac{2\operatorname{arctg}\left(\log_3\left(2\sin^2 t+1\right)\right)}{\sin t+1} \end{cases},$$

$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, zorientowaną od punktu $(0,0)$ do punktu $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$;

d) $\iint\limits_G 2dxdy$, gdzie G jest czworokątem o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(0,2)$, $C(1,1)$, $D(1,0)$;

e) $\int\limits_K \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$, gdzie K jest okręgiem $x^2+y^2=1$ zorientowanym dodatnio.

Zadanie 4. Oblicz podane całki powierzchniowe (niezorientowane):

a) $\iint\limits_S x^2\sqrt{1+2z}dS$, gdzie S jest częścią powierzchni $z=\frac{1}{2}y^2$ zawartą między powierzchniami $|x|+|y|=2$, $z=0$;

b) $\iint\limits_S xyz dS$, gdzie S jest pobocznicą walca o promieniu $r = 2$, środku w punkcie $(0, 0, 0)$ zawartą między płaszczyznami $z = 0$ oraz $z = 4$;

c) $\iint\limits_S z dS$, gdzie S jest czworościanem ograniczonym płaszczyznami $x + y + z = 1$, $2x = 1$, $2y = 1$, $2z = 1$;

d) $\iint\limits_S 2 dS$, gdzie S jest powierzchnią $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 1$;

e) $\iint\limits_S \operatorname{arctg}\left(x^2 + y^2 + z^2 - 8\right) dS$, gdzie S jest częścią powierzchni $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ zawartą w walcu $x^2 + y^2 = 5$.

Zadanie 5. Oblicz podane całki powierzchniowe (zorientowane):

a) $\iint\limits_S y dy dz - x dz dx + xy dx dy$, gdzie S jest dodatnio zorientowaną powierzchnią określoną zależnościami $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$;

b) $\iint\limits_S \ln x dy dz + \ln y dz dx + \ln z dx dy$, gdzie S jest dodatnio zorientowaną powierzchnią określoną zależnościami $z = x + y$, $x > 1$, $y > 1$, $x + y < 4$;

c) $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 dy dz$, gdzie S jest dodatnio zorientowaną powierzchnią określoną zależnościami $z = 2\sqrt{x^2 + 4y^2}$, $x^2 + 4y^2 \leq 4$.

d) $\iint\limits_S xy - x^2 y dy dz + y^2 z dz dx - (z - x) y dx dy$, gdzie S jest dodatnio zorientowaną powierzchnią $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq \sqrt{5}$.

Zadanie 6. Oblicz podane całki stosując – jeżeli to możliwe – twierdzenie Stokesa lub twierdzenie Gaussa–Ostrogradzkiego:

a) $\oint\limits_C xz^2 dx + zy^2 dy + yx^2 dz$, gdzie C jest zorientowanym dodatnio brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$;

b) $\iint\limits_S xy dy dz + yz dx dz + xz dx dy$, gdzie S jest wewnętrzną stroną powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

c) $\oint\limits_C (x + z) dx + \sin(y + z) dy + \cos z dz$, gdzie C jest zorientowaną ujemnie krzywą powstałą w wyniku przecięcia walca $x^2 + y^2 = 4$ i płaszczyzny $x + y + z = 1$;

d) $\iint\limits_S (x + y + z) dx dz$, gdzie S jest brzegiem czworościanu o wierzchołkach $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ zorientowanym dodatnio;

e) $\oint\limits_C \frac{1}{3} dx + \frac{1}{3} dy + \frac{1}{3} dz$, gdzie C jest dodatnio zorientowanym brzegiem kwadratu $\max(|x|, |y|) \leq 1$.

Zadanie 7. Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie zamkniętą powierzchnią gładką. Co mierzy całka $\frac{1}{3} \iint\limits_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$?