Zestaw 1. Funkcje cyklometryczne, funkcje hiperboliczne

Zadanie 1. Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji: ([1])

a) $f_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ni x \to \sin x + 1 \in [0, 2]$

b) $f_2 : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \ni x \to \operatorname{tg} x \in \mathbb{R}$;

c) $f_3 : \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] \ni x \to \sin x \in [-1, 1]$;

d) $f_4 : \mathbb{R} \ni x \to \sinh x \in \mathbb{R}$;

e) $f_5 : [0, \infty) \ni x \to \cosh x \in [0, \infty)$.

Zadanie 2. Naszkicuj wykresy funkcji:

a) $y = \arcsin(\sin x)$;

b) $y = \arcsin(\cos x)$;

c) $y = \sin(\arcsin x)$;

d) $y = \cos(\arcsin x)$;

e) $y = \arccos(\sin x)$.

Zadanie 3. Rozwiąż równanie:

a) $\arccos(-x) + \arccos(x) = \pi$;

b) $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{2}$;

c) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Zadanie 4. Uzasadnij podane własności funkcji hiperbolicznych:

a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

c) $\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

d) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$;

e) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sin x \sinh y$.

Zadanie 5. Wyznacz okres podstawowy funkcji:

a) $y = \cos(2x - 3)$;

b) $y = \frac{1}{\cos x}$;

c) $y = |\sin x| + |\cos x|$;

d) $g \circ f$, gdzie f – funkcja okresowa o okresie podstawowym T, g – injekcja.

Zadanie 6. Niech $T : [0, 1) \to [0, 1)$ będzie funkcją określoną wzorem:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x - 1 & \text{dla } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}.$$

Wyznacz złożenie $T \circ T$. Jeżeli to możliwe, wyznacz funkcję odwrotną do $T \circ T$.

[1] $\sinh x \overset{df}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ – *sinus hiperboliczny*, $\cosh x \overset{df}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ – *cosinus hiperboliczny*.