

## Zestaw 2. Granice ciągów

**Zadanie 1.** Zbadaj zbieżność podanych ciągów; zastosuj twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym:

a)  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ;

b)  $z_1 = a > 0, z_{n+1} = \frac{z_n}{1+z_n}$ ;

c)  $u_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ ;

d)  $a_1 = a > 0, a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ ;

e)  $x_n = \frac{2^n}{n!}$ ;

f)\*  $u_0 = a, v_0 = b, a > b > 0$  oraz  $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ .

**Zadanie 2.** Wyznacz granice podanych ciągów ( $n \rightarrow +\infty$ ):

a)  $\frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}$ ;      b)  $\sqrt{n^2 + n} - \sqrt[4]{n^4 + 1}$ ;      c)  $\frac{1+2+\dots+n}{n^3+1} \cos n!$ ;

d)  $\sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n}$ ;      e)  $n \left( \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} - 1 \right)$ ;      f)  $\sin^2 \left( \pi \sqrt{n^2 + n} \right)$ ;

g)  $\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{6n}$ ;      h)  $\left(\frac{4n}{4n+1}\right)^n$ ;      i)  $(0, \underbrace{9 \dots 9}_{\times n})^{10^n}$ ;

j)  $\left[\frac{3n+1}{n+1}\right]$ ;      k)  $\sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \sin \frac{x}{2^n}$ ;      l)  $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n}$ .

**Zadanie 3.** Wyznacz podane granice; zastosuj twierdzenie o trzech ciągach:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n + 4n}{3n-1}$ ;

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$ ;

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1}}$ ;

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{1+n^2} + \dots + \frac{1}{n+n^2} \right)$ ;

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+n^2} + \frac{2}{2+n^2} + \dots + \frac{n}{n+n^2} \right)$ ;

f)\*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin \frac{1}{n}}$ ;

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{2n}]}{n}$ ;

h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cos n - 5) n^2$ ;

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ ;

j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(2^n+1)}{\log_2(4^n+1)}$ .

**Zadanie 4.** Znajdź granicę  $L$  ciągu obwodów oraz granicę  $S$  ciągu pól wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu  $r$ , gdy ilość boków wielokątów wzrasta do nieskończoności.

**Zadanie 5.** Odcinek  $AB$  o długości  $d$  podzielono na  $n$  równych części. Na każdej z nich, z pominięciem pierwszej i ostatniej, zbudowano równoboczne trójkąty. Oblicz granice pól  $S_n$  i obwodów  $P_n$  otrzymanej figury granicznej (przy  $n \rightarrow \infty$ ).

**Zadanie 6.** W stożek obrotowy o wysokości  $h$  i promieniu podstawy  $r$  wpisano ostrosłup prawidłowy w ten sposób, że wysokość ostrosłupa jest jednocześnie wysokością stożka, a podstawą ostrosłupa jest  $n$ -kąt foremny wpisany w podstawę stożka. Przez  $S_n$  oraz  $V_n$  oznaczono odpowiednio pole powierzchni całkowitej oraz objętość tak utworzonego ostrosłupa. Oblicz  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ .