Zestaw 3. Granice i ciągłość funkcji

Zadanie 1. Uzasadnij, że nie istnieją granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x-\cos x)$.

Zadanie 2.* Uzasadnij równości:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Zadanie 3. Wyznacz granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$, $n\in\mathbb{N}$ c) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(\arcsin x)^2}{1-x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$, $m\in\mathbb{R}$ e) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{8-x}{\sin(\frac{1}{8}\pi x)}$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(-2)^{[x]}}{x}$ i) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{\operatorname{tg}x}$ k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(2^x+1)}{\ln(3^x+1)}$ l) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{tg}^3\sqrt{x}}{x}$

m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ o) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$

p) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$ r) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ s) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x^2-1}{(y-2)^2}$.

Zadanie 4. Wyznacz zbiór punktów ciągłości (lewostronnej i prawostronnej) funkcji:

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &, x>0\\ \lim\limits_{t\to 1}\left(\frac{\pi}{4}(1-t)\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}\right) &, x\leqslant 0\end{cases}$ b) $f(x)=x-[x]$;

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}(-1)^{[x]} &, x\neq 0\\ 1 &, x=0\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} &, x\neq 0\\ 0 &, x=0\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(x-1)+2x^2 &, |x|>1\\ -\frac{\pi}{4} &, x=0\end{cases}$ f) $f(x)=1+\sqrt{\ln\cos(2\pi x)}$

Zadanie 5. Wyznacz takie wartości parametrów $a,b\in\mathbb{R}$, aby podane funkcje były ciągłe:

a) $f(x)=\begin{cases}\exp\left(\log_{x^2+1}e^{-2}\right) &, x\neq 0\\ a &, x=0\end{cases}$, b) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{\sin^2 2x}}{2x} &, x\neq 0\\ a &, x=0\end{cases}$,

c) $f(x)=\begin{cases}(ax+b)\sin\frac{1}{x} &, x\neq 0\\ 0 &, x=0\end{cases}$, d) $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^2} &, x\neq 0\\ a^2-\frac{1}{2} &, x=0\end{cases}$.

Zadanie 6.* Podaj przykład funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, której zbiorem punktów ciągłości jest:

a) $\{0\}$; b) $\{0,1\}$; c) $\mathbb{Z}$; d) $\emptyset$.