Zestaw 4. Różniczkowalność funkcji, reguła de l'Hospitala, tw. Lagrange'a

Zadanie 1. Korzystając z definicji, oblicz pochodne funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ b) $g(x) = a^{-x}$ c) $h(x) = x^n$ d) $f(x) = \sinh x$

e) $g(x) = \cosh(x)$ f) $h(x) = \log_a x$ g) $f(x) = \operatorname{tg} x$ h) $g(x) = \arcsin x$.

Zadanie 2. Wyznacz zbiory, w których podane funkcje mają (funkcje) pochodne:

a) $f(x) = x|x|$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & , x \geqslant 1 \\ 3x^2 & , x < 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Zadanie 3. Oblicz pochodne podanych funkcji:

a) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ b) $y = \arcsin \sqrt[4]{1-5x}$ c) $y = \sin^7 \frac{2^x+1}{3^x+1}$

d) $y = \sin x^{\operatorname{tg} x}$ e) $y = \sin^{\cos x} x$ f) $y = \operatorname{arctg} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

Zadanie 4. Uzasadnij podane nierówności; zstosuj tw. Lagrange'a:

a) $e^x > 1+x$, dla $x > 0$;

b) $|\ln(1+x) - \ln(1+y)| \leqslant |x-y|$, dla $x, y > 0$;

c) $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$, dla $0 < a < b$;

d) $x \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, dla $0 \leqslant x < 1$.

Zadanie 5. Uzasadnij, że symbolom

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0$$

nie można przypisać żadnej ustalonej wartości liczbowej (ani nieskończoności).

Zadanie 6. Oblicz poniższe granice; jeżeli to możliwe zastosuj regułę de l'Hospitala:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^x$ g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

Zadanie 7. Czy każda funkcja różniczkowalana jest ciągła? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 8. Zakładając, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, oblicz granicę

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

Czy z istnienia tej granicy wynika różniczkowalność funkcji f w punkcie x_0?