

Zestaw 5. Badanie funkcji, wzór Taylora

Zadanie 1. Czy następujące stwierdzenie jest prawdziwe: Funkcja $f : A \rightarrow B$ ($A, B \subset \mathbb{R}$) jest stała wtedy i tylko wtedy gdy jej pochodna jest funkcją zerową na A ?

Zadanie 2. Wykaż poniższe nierówności:

- a) $e^x > x + 1$, dla $x > 0$;
- b) $\frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{\operatorname{tg} y}{y}$, dla $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$;
- c) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, dla $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ (tzw. nierówność Bernoulliego).

Zadanie 3. Podane funkcje rozwiń w szereg Taylora w otoczeniu punktu x_0 do rzędu n :

- a) $y = \sin x$, $x_0 = 0$, $n = 5$;
- b) $y = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$, $n = 4$;
- c) $y(b) = (a + b)^4$, $x_0 = b_0 = 0$, $n = 4$;
- d) $y = \exp(ax)$, $x_0 = 0$, $n = N$.

Zadanie 4. Oszacuj dokładność przybliżenia:

- a) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, dla $|x| < \frac{\pi}{6}$;
- b) $\operatorname{tg} x \approx x + x^3 + x^4$, dla $|x| < \frac{1}{10}$;
- c) $\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2}$, dla $|x| < \frac{1}{10}$.

Zadanie 5. Stosując wzór Taylora, oblicz wartość podanego wyrażenia z zadaną dokładnością d :

- a) $\cos 0.2$, $d = 10^{-4}$;
- b) e , $d = 10^{-3}$;
- c) $\sqrt[3]{1.003}$, $d = 10^{-3}$;
- d)* $(1.01)^{0.51}$, $d = 10^{-1}$;
- e)* $0,98^{1,01}$, $d = 10^{-2}$.

Zadanie 6. Wyznacz kąty, pod którymi przecinają się krzywe:

- a) $y = 4 - x$ i $y = 4 - 0.5x^2$;
- b) $y = \sin x$ i $y = \cos x$;
- c) $y = e^x$ i oś OY .

Zadanie 7. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji:

- a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 15x - 15$,
- b) $y = \frac{x}{x^2+1}$,
- c) $y = x^2 e^{-x}$,
- d) $y = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$.

Zadanie 8. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji:

a) $y = \sin 2x - x$ w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

b) $y = x^2 \ln x$ w przedziale $[1, e]$,

c) $y = x + \sqrt{|x|}$ w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

d) $y = xe^{-x}$ w przedziale $[0, \infty)$.

Zadanie 9. Znajdź asymptoty funkcji $f(x) = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

Zadanie 10. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

a) $y = x + 2 \arctg x$,

b) $y = \frac{1-x^3}{x^2}$,

c) $y = xe^{x^3}$,

d) $y = (x + 1)^{\frac{2}{3}} - (x - 1)^{\frac{2}{3}}$.

Zadanie 11. Pudełko do zapalek ma długość 5cm i objętość 33.75cm^3 . Jaka musi być szerokość i wysokość pudełka, aby suma pól wszystkich jego dziewięciu ścianek była najmniejsza?

Zadanie 12. Pień o przekroju kołowym o średnicy d trzeba obciosać w taki sposób, aby otrzymać belkę o przekroju prostokątnym i największej wytrzymałości (wytrzymałość belki prostokątnej jest proporcjonalna do iloczynu bh^3 , gdzie b jest podstawą przekroju belki, a h wysokością). Jak to zrobić?

Zadanie 13. Okno ma kształt prostokąta zakończonego półkolem. Dany jest obwód prostokąta $2p$. Wyznacz wysokość i szerokość okna tak, aby ilość światła przenikającego przez to okno była największa.