Zestaw 6. Całka nieoznaczona

Zadanie 1. Oblicz podane całki:

a) $\int \frac{\left(x^2-1\right)^3}{x} dx$; b) $\int \left(3+2\sqrt[4]{x}\right)^3 dx$; c) $\int \frac{x-2\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}} dx$;

d) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$; e) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$; f) $\int \frac{\sqrt{u^3}+1}{\sqrt{u}+1} du$;

g) $\int \left(e^{-x}+1\right)^3 dx$; h) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$; i) $\int \frac{e^{4x}-1}{e^x-1} dx$.

Zadanie 2. Stosując wzór na całkowanie przez podstawienie, oblicz całki: ([4])

a) $\int \frac{x}{\sqrt{3-5x^2}} dx$; b) $\int \frac{x}{\sqrt{3-5x^4}} dx$; c) $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+11} dx$

d) $\int \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} dx$; e) $\int x \operatorname{tg} x^2 dx$; f) $\int \sin^m x \cos^3 x dx$, $m \in \mathbb{N}$;

g) $\int \sqrt{3x+7} dx$; h) $\int \frac{1}{x^2+bx+c} dx$; i) $\int \cos^{2n+1} x dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3. Stosując wzór na całkowanie przez części, oblicz całki:

a) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$; b) $\int \ln x dx$; c) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$;

d) $\int x (\operatorname{arctg} x)^2 dx$; e) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$; f) $\int x^2 \ln(1+x) dx$;

g) $\int \sin(\ln x) dx$; h) $\int (\arccos x)^3 dx$; i) $\int \cos x \ln(\operatorname{ctg} x) dx$.

Zadanie 4. Oblicz całki z funkcji wymiernych:

a) $\int \frac{1}{(x+2)(x-5)} dx$; b) $\int \frac{4x-1}{x^2-x-2} dx$; c) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$;

d) $\int \frac{1}{x^4-x^2} dx$; e) $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} dx$; f) $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} dx$;

g) $\int \frac{dx}{x\left(4+x^2\right)^2\left(1+x^2\right)}$; h) $\int \frac{2x+1}{\left(1-x^2\right)(1+x)} dx$; i) $\int \frac{dx}{\left(2x^2-x+1\right)}$.

Zadanie 5. Wyprowadź wzory rekurencyjne (względem n) na podane całki:

a) $\int x^\alpha \ln^n x dx,\ n \in \mathbb{N}$; b) $\int \sin^n x dx,\ n \in \mathbb{N}$; c) $\int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} dx,\ n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 6. Oblicz podane całki trygonometryczne:

a) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ b) $\int \sin 2x \cos 4x dx$ c) $\int \frac{dx}{1+4\cos x}$ d) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$

e) $\int \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} dx$ f) $\int \frac{(2\sin x + 3\cos x)}{\sin^2 x \cos x + 9\cos^3 x} dx$ g) $\int \sin x \sin 3x dx$ h) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx$.

[4] W przykładzie h) zakładamy, że $b^2-4c<0$.

Zadanie 7. Oblicz podane całki funkcji niewymiernych:

a) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}}dx$ b) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1}{x+1}dx$ c) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$ d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x-7}}$

e) $\int \sqrt{x^2+4}dx$ f) $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{1+x^2}}$ g) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$ h) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}dx$.

i) $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ j) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$ k) $\int \frac{x^3+x^2-2x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ l) $\int \frac{x\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$

Zadanie 8. Dla całek postaci $\int x^p\left(ax^q+b\right)^r dx$, gdzie $p,q,r\in\mathbb{Q}$ stosuje się następujące podstawienia:

- jeżeli $r\in\mathbb{Z}$ – podstawiamy $x=t^s$, gdzie s to najmniejszy wspólny mianownik ułamków p i q;
- jeżeli $\frac{p+1}{q}\in\mathbb{Z}$ – podstawiamy $ax^q+b=t^s$, gdzie s – mianownik r;
- jeżeli $\frac{p+1}{q}+r\in\mathbb{Z}$ – podstawiamy $a+\frac{b}{x^q}=t^s$, gdzie s – mianownik ułamka r.

Stosując powyższe podstawienia oblicz całki:

a) $\int \sqrt{x^3+x^4}dx$ b) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Zadanie 9. Oblicz całki:

a) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$ b) $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\left(x^2-1\right)^2}dx$ c) $\int \frac{\mathrm{arctg}\,e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)}dx$.

d) $\int \sqrt{1-x^2}\,\arcsin x\,dx$ e) $\int \frac{dx}{e^x+e^{2x}}$ g) $\int \frac{4e^x+6e^{-x}}{9e^x-4e^{-x}}dx$