Zestaw 7. Całka oznaczona

Zadanie 1. Oblicz całki oznaczone:

a) $\int\limits_0^{\pi} x\sin x dx$ b) $\int\limits_0^{\ln 3} xe^{-x}dx$ c) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\, x dx$ d) $\int\limits_0^{1} e^x\sin\pi x dx$

e) $\int\limits_1^{e} \ln^2 x dx$ f) $\int\limits_{-1/2}^{\sqrt{3}/2} \arcsin x dx$ g) $\int\limits_0^{1} x\sqrt{1+x}dx$ h) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$.

i) $\int\limits_0^{2} xe^{x^2}dx$ j) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$ k) $\int\limits_{-2}^{2} |x|\,e^{|x-1|}dx$ l) $\int\limits_0^{1} x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx$

Zastosowanie całek oznaczonych w geometrii

I. Pole figury płaskiej:

a) $\Gamma : (x(t), y(t)),\ t\in[t_1,t_2]\,;\ x\in C^1([t_1,t_2]),\ y\in C([t_1,t_2])$. Pole ograniczone krzywą Γ oraz prostymi $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} \left|y(t)\,x'(t)\right| dt. \qquad (1)$$

b) $\Gamma : r = f(\theta),\ f\geq 0,\ f\in C([\alpha,\beta])$ oraz $0<\beta-\alpha<2\pi$. Pole obszaru ograniczonego łukiem f oraz promieniami wodzącymi o amplitudach α,β wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2\, d\theta. \qquad (2)$$

Zadanie 2. Oblicz pola figur ograniczonych podanymi krzywymi:

a) $y=\sqrt{3}\cos x$ oraz $y=\sin x$, dla $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;
b) $y=x^2-6x+7$ oraz $y=3-x$;
c) $xy^2=1$, $xy^2=4$, $y=1$ oraz $y=2$;
d) $y^2=(1-x^2)^2$ (krzywa zamknięta);
e) $x(t)=a\cos(t)$, $y(t)=b\sin(t)$; $t\in[0,2\pi]$,
f) $x(t)=a(2\cos(t)-\cos(2t))$, $y(t)=a(2\sin(t)-sin(2t)$; $t\in[0,2\pi]$,
g) $x(t)=a\cos^5(t), y(t)=a\sin^5(t)$; $t\in[0,2\pi]$,
h) $r(\phi)=a\cos(\phi)$, dla $0\leq\phi\leq 2\pi$;
i) $r(\phi)=a(1+\cos\phi)$, dla $0\leq\phi\leq 2\pi$.

II. Długość krzywej:

a) $\Gamma : (x(t), y(t)),\ t\in[t_1,t_2]\,;\ x,y\in C^1([t_1,t_2])$ oraz brak punktów wielokrotnych. Długość łuku Γ wyraża się wzorem:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt; \qquad (3)$$

b) $\Gamma : r = f(\theta),\ f\in C^1([\alpha,\beta])$ oraz brak punktów wielokrotnych. Długość łuku Γ wyraża się wzorem:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\theta))^2+(f'(\theta))^2}d\theta. \qquad (4)$$

Zadanie 3. Oblicz długości podanych krzywych:

a) $y = \ln x$, $x \in \left[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right]$;

b) $y = \ln\cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$;

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$;

d) $x(y) = \frac{1}{2}(y^2 - \ln y)$, $1 \leq y \leq 2$;

e) $f(x) = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$;

f) $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

g) $r(\phi) = a(1 + \cos\phi)$, $0 \leq \phi \leq \pi$;

h) $r(\phi) = a\sin^3 \frac{1}{3}\phi$, $0 \leq \phi \leq 3\pi$;

i) $r(\phi) = a(1 + \cos\phi)$.

III. Objetość bryły obrotowej:

a) $\Gamma : (x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$; $x \nearrow$ lub $x \searrow$, $x, y \in C^1([t_1, t_2])$, $y \geq 0$. Objetość bryły obrotowej powstałej przez obrót Γ dookoła osi Ox w przedziale $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\, x'(t)\, dt; \tag{5}$$

b) $y = f(x)$, $f \in C([a, b])$, $f \geq 0$. Objetość bryły obrotowej powstałej przez obrót Γ dookoła osi Oy wyraża się wzorem:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx. \tag{6}$$

Zadanie 4. Oblicz objętość brył powstałych z obrotu podanych figur wokół wskazanych osi:

a) $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{1+x^2}$, wzg. Ox;

b) $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}e^{-x}$, wzg. Ox;

c) $1 \leqslant x \leqslant e$, $\ln x \leqslant y \leqslant \ln x^2$, wzg. Ox;

d) $f(x) = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$, wzg. Oy;

e) $y^2 = 2px$, $0 \leq x \leq x_0$, wzg. Oy.

IV. Pole powierzchni bryły obrotowej:

a) $\Sigma : (x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$; $x \nearrow$ lub $x \searrow$, $x, y \in C^1([t_1, t_2])$, $y \geq 0$. Pole powierzchni bocznej bryły obrotowej powstałej przez obrót Σ dookoła osi Ox w przedziale $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt; \tag{7}$$

b) $\Sigma : y = f(x)$, $f \in C^1([a, b])$, $a \geq 0$. Pole powierzchni bocznej bryły obrotowej powstałej przez obrót Σ dookoła osi Oy wyraża się wzorem:

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Zadanie 5. Wyznacz objętość oraz pole powierzchi (całkowitej) podanych figur:

a) kuli o promieniu R;

b) walca o wysokości h i promieniu R;

c) stożka o wysokości h i promieniu R;

d) obrotowego stożka ściętego o promieniach podstaw r_1 oraz r_2 i wysokości h.

Zadanie 6. Oblicz pola powierzchni powstałych przez obrót dookoła osi Ox krzywych o równaniach:

a) $y^2 = 4ax$, $0 \le x \le 3a$;

b) $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(a < b)$;

c) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

d) $x(t) = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y(t) = a(2\sin t - \sin 2t)$, $0 \le t \le \pi$;

e) $x(t) = a(\cos t + t\sin t)$, $y(t) = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

Zadanie 7.* Zastosowanie całek w fizyce:

a) Jaką pracę należy wykonać, aby ciało o masie m podnieść z powierzchni Ziemi na wysokość h?

b) Oblicz moment bezwładności prostokąta o bokach a i b względem boku a, przyjmując stała gęstość powierzchniową ρ.

c) Oblicz moment statyczny względem osi Ox łuku paraboli $y = \sqrt{2px}$, $0 \le x \le 2$.

d) Wyznacz środek ciężkości stożka obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h.

e) Ciało wykonuje drgania wzdłuż osi Ox z szybkością $v(t) = v_0 \cos \omega_o t$, gdzie v_0, ω_0 są stałymi. Znajdź położenie ciała w chwili t_2, jeżeli w chwili t_1 znajdowało się ono w punkcie x_1.