Zestaw 8. Ciągłość i różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

Zadanie 1. Przedstaw graficznie dziedziny (naturalne) podanych funkcji:

a) $f(x,y) = \frac{1}{(x-2)(y+1)}$,

b) $f(x,y) = \log_{x^2+y^2}\left(4 - x^2 - y^2\right)$,

c) $f(x,y) = \sqrt[4]{xy}$,

d) $f(x,y) = \sqrt{\ln\cos(x-y)}$.

Zadanie 2. Wyznacz granice:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$ e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2-1}{(y-2)^2}$.

Zadanie3. Zbadaj ciągłość podanych funkcji:

a) $f(x,y) = \begin{cases} 1-\sqrt{x^2+y^2} & \text{dla } x^2+y^2<1 \\ x^2+y^2-1 & \text{dla } x^2+y^2 \geqslant 1 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{dla } x>0 \\ \sqrt{x^2+y^2} & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Zadanie 4. Wyznacz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f w punkcie $(0,0)$:

a) $f(x,y) = (x+1)^{y+1}$,

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2y}$,

d) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{dla } xy=0 \\ 1 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases}$.

Zadanie 5. Zbadaj różniczkowalność podanych funkcji we wskazanch punktach:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x_0,y_0) = (1,-2)$,

b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$,

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$,

d) $f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$.

Zadanie 6. Zbadaj, czy dla podanych funkcji zachodzi: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

c) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^6 - 8y^3}$.

Zadanie 7. Oblicz pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial z}{\partial y}$ podanych funkcji złożonych:

a) $z = f(u,v) = \ln \frac{u}{v+1}$, gdzie: $u = x \sin y$ i $v = x \cos y$;

b) $z = f(u,v,w) = \arcsin \frac{u}{v+w}$, gdzie: $u = e^{\frac{x}{y}}$, $v = x^2 + y^2$ oraz $w = 2xy$.

Zadanie 8. Niech φ oraz ψ będą dowolnymi funkcjami mającymi pierwszą i drugą pochodną. Uzasadnij, że określona poniżej funkcja f spełnia podane równanie:

a) $f(t,x) = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$;

b) $f(x,y) = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Zadanie 9. Oblicz przybliżone wartości podanych wyrażeń:

a) $\frac{\operatorname{arctg} 0,9}{\sqrt{4,02}}$,

b) $1,01 \sin\left(\frac{\pi}{6} + 0,1\right)$,

c) $0,98^{1,01}$.