Zestaw 9. Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Zadanie 1. Oblicz gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$;

b) $f(x,y)=x\ln y+y\ln x$, $(x_0,y_0)=(1,1)$;

c) $f(x,y)=\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $(x_0,y_0)=(0,3)$.

Zadanie 2. Wyznacz pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$, $\overrightarrow{v}=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$;

b) $f(x,y)=x\ln y+y\ln x$, $(x_0,y_0)=(1,1)$, $\overrightarrow{v}=(1,0)$;

c) $f(x,y)=|x-y|$, $(x_0,y_0)=(1,1)$, $\overrightarrow{v}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$;

d) $f(x,y)=2|x|+|y|$, $(x_0,y_0)=(0,0)$, $\overrightarrow{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Zadanie 3.* Czy istnieje funkcja ciągła dwóch zmiennych określona na zbiorze spójnym, która posiada dwa maksima lokalne właściwe będące jedynymi jej ekstremami właściwymi? Czy istnieje funkcja jednej zmiennej o takiej własności?

Zadanie 4. Wyznacz ekstrema lokalny podanych funkcji:

a) $f(x,y)=3(x-1)^2+4(y+2)^2$;

b) $f(x,y)=x^3+3xy^2-51x-24y$;

c) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$;

d) $f(x,y)=e^{-\left(x^2+y^2+2x\right)}$;

e) $f(x,y)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$.

Zadanie 5. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w podanych obszarach:

a) $f(x,y)=x^2+y^2$, $|x|+|y|\leqslant 2$;

b) $f(x,y)=\begin{cases} 1-\sqrt{x^2+y^2} & \text{dla } x^2+y^2<1 \\ x^2+y^2-1 & \text{dla } x^2+y^2\geqslant 1 \end{cases}$, $\mathbb{R}^2$;

c) $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$ w trójkącie ograniczonym osią Ox, osią Oy i prostą $x+y=2\pi$;

d) $f(x,y)=x^2+2xy-4x+8y$ w zbiorze $[0,1]\times[0,2]$.

Zadanie 6. Oblicz odległość początku układu współrzędnych od płaszczyzny

$$\pi: x-2y+3z-6=0.$$

Zadanie 7. Spośród wszystkich trójkątów wpisanych w koło o promieniu r, wyznacz ten o największym polu.