Zestaw 10. Funkcje uwikłane

Zadanie 1. Zbadaj, czy podane równanie jednoznacznie określa ciągłą funkcję uwikłaną $y = y(x)$ w otoczeniu wskazanych punktów:

a) $x^3 + x - y^3 - y = 0$, $(2, 2)$;
b) $x^y = y^x$, $A(2, 4)$, $B(e, e)$, $C(3, 3)$;
c) $x - \sin y = 0$, $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$;
d) $x^2 = y^2$, $A(1, 3)$, $B(0, 0)$.

Zadanie 2. Wyznacz styczne do krzywych we wskazanych punktach:

a) $x^3 + x - y^3 - y = 0$, $A(2, 2)$;
b) $x^2 + y^2 - 3xy + x = 0$, $B(1, 1)$;
c) $xe^y + ye^x = e^{xy}$, $C(1, 0)$.

Zadanie 3. Dla podanych funkcji uwikłanych $y = y(x)$ wyznacz $y''(x)$:

a) $F(x, y) = 0$, dla funkcji F mającej ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu;
b) $x^2 + y^2 - 3xy = 0$;
c) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;
d) $xe^y - y + 1 = 0$.

Zadanie 4. Znajdź „przybliżenie” podanej funkcji uwikłanej $y = y(x)$ wielomianem stopnia n w otoczeniu punktu (x_0, y_0) ([12]):

a) $e^{xy} - x^2 y - 1 = 0$, $n = 2$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$;
b) $e^{xy} - x = 0$, $n = 2$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$;
c) $\ln\left(y + x^3 + xy^3\right) - x^3 = 1 + xy^3$, $n = 2$, $(x_0, y_0) = (0, e)$;
d) $x^4 + \frac{4}{y^2} + \frac{4x^2}{y} - 1 = 0$, $n = 3$, $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

Zadanie 5. Znajdź ekstrema podanych funkcji uwikłanych y zmiennej x:

a) $x^2 + y^2 - 3axy = 0$, $(a \in \mathbb{R})$;
b) $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$;
c) $\frac{1}{5}x^5 + y^4 = 4xy^2$.

[12] Wskazówka: zastosuj wzór Taylora.