
Wstęp do analizy numerycznej – pytania na egzamin ustny

1. Równość w sensie jeden (definicja, własności, przykłady) oraz arytmetyka fl.
2. Uwarunkowanie zadania obliczeniowego, numeryczna poprawność oraz numeryczna stabilność algorytmu: definicje, przykłady.
3. Problem interpolacji wielomianowej Lagrange'a: sformułowanie problemu, istnienie i jednoznaczność rozwiązania, twierdzenie o błędzie (z dowodami).
4. Różnice dzielone (w tym dla węzłów powtarzających się): definicja, własności (z uzasadnieniem), zastosowanie w problemie interpolacji wielomianowej (algorytm różnic dzielonych).
5. Twierdzenie o postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego (z dowodem).
6. Problem interpolacji wielomianowej Hermite'a: sformułowanie problemu, istnienie i jednoznaczność rozwiązania (z dowodami), twierdzenie o błędzie (bez dowodu).
7. Funkcje sklejjane oraz naturalne funkcje sklejjane: definicje oraz reprezentacje (z uzasadnieniem).
8. Problem interpolacji funkcjami sklejjanymi: sformułowanie problemu, istnienie i jednoznaczność rozwiązania (z dowodem), twierdzenie o błędzie interpolacji (dla naturalnych kubicznych funkcji sklejjanych – bez dowodu).
9. Problem interpolacji trygonometrycznej: sformułowanie problemu, motywacja (interpolacja funkcji okresowych), istnienie i jednoznaczność rozwiązania (z dowodem).
10. Interpolacyjne wielomiany trygonometryczne dla węzłów równoodległych: postać zespolona oraz rzeczywista (z wyprowadzeniem wzorów na współczynniki w wybranym przez siebie przypadku).
11. Problem aproksymacji: sformułowanie ogólne w przestrzeni unormowanej, istnienie elementu optymalnego (z dowodem), przykład braku elementu optymalnego, twierdzenie o jedyności elementu optymalnego w przestrzeniach silnie unormowanych (z dowodem).
12. Aproksymacja średniokwadratowa: sformułowanie problemu, twierdzenie o silnym unormowaniu przestrzeni euklidesowej (z dowodem), istnienie i jednoznaczność rozwiązania.
13. Twierdzenie o optymalności rzutu ortogonalnego (z dowodem), układ równań normalnych (w tym przykład Hilberta), reprezentacja elementu optymalnego w bazie ortogonalnej przestrzeni (z dowodem).
14. Wielomiany ortogonalne: definicja, własności (z uzasadnieniem), przykłady zastosowania.

15. Wielomiany Czebyszewa I rodzaju: definicja, wybrane własności (w tym własność optymalności w normie supremum – z uzasadnieniem).
16. Problem aproksymacji jednostajnej: sformułowanie problemu, istnienie rozwiązania, przykład braku jednoznaczności rozwiązania, warunek Haara, twierdzenie o jedyności elementu optymalnego (bez dowodu), twierdzenie Czebyszewa o alternansie (z dowodem jednej z implikacji).
17. Definicje kwadratury interpolacyjnej oraz rzędu kwadratury, twierdzenie o rzędzie kwadratury interpolacyjnej (z dowodem).
18. Kwadratura Gaussa: definicja, własności (w tym postać kwadratury Gaussa, jej rząd oraz błąd – z uzasadnieniami).
19. Kwadratury Newtona-Cotesa: definicja, przykład (postać oraz rząd – z uzasadnieniem), twierdzenie o rzędzie (bez dowodu).
20. Kwadratury złożone: definicja, przykłady, zalety i wady w stosunku do kwadratur interpolacyjnych.
21. Równania nieliniowe: ogólna postać metody iteracyjnej, metody zbieżne lokalnie oraz globalnie, wykładnik zbieżności metody, przykłady.
22. Metoda Newtona: postać (jako przykład metody interpolacyjnej), twierdzenie o zbieżności lokalnej (z dowodem), wykładnik zbieżności (z dowodem).
23. Równania liniowe: wykorzystanie rozkładu $A = LU$ do rozwiązania równania $Ax = b$; rozwiązywanie układów o macierzy trójkątnej (algorytm, koszt, właściwości numeryczne).
24. Równania liniowe: wykorzystanie rozkładu $A = QR$ do rozwiązania równania $Ax = b$; rozwiązywanie układów o macierzy ortogonalnej (algorytm, koszt, właściwości numeryczne).
25. Algorytm eliminacji Gaussa rozkładu $A = LU$: algorytm, koszt (z uzasadnieniem), właściwości numeryczne (bez uzasadnienia), przykłady zastosowania (rozwiązywanie układów równań liniowych, wyznaczanie macierzy odwrotnej, obliczanie wyznacznika macierzy).
26. Algorytm Householdera rozkładu $A = QR$: algorytm, koszt, właściwości numeryczne (bez uzasadnienia).
27. Algorytm Grama-Schmidta rozkładu $A = QR$: algorytm (z uzasadnieniem), koszt, właściwości numeryczne (bez uzasadnienia).
28. Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych: warunki wystarczający oraz konieczny i wystarczający zbieżności metody iteracyjnej $x_{k+1} = Bx_k + c$ dla dowolnego przybliżenia początkowego x_0 (z uzasadnieniami), przykłady metod.
29. Lokalizacja wartości własnych macierzy: związek promienia spektralnego z dowolną normą macierzową zgodną z normą wektorową, twierdzenie Gerszgorina (z uzasadnieniami).
30. Metoda potęgowa wyznaczania maksymalnej (co do modułu) wartości własnej i odpowiadającego jej wektora własnego, deflacja.