Wstęp do analizy numerycznej

Materiał ćwiczeniowy dla studentów kierunku Matematyka

Michał Góra
Wydział Matematyki Stosowanej AGH

Kraków 2023

Zestaw 1. Arytmetyka zmiennopozycyjna

Zadanie 1. Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x istnieją dokładnie jedna liczba całkowita c oraz dokładnie jedna liczba $m \in [\beta^{-1}, 1)$, gdzie $\beta \geqslant 2$ jest ustaloną liczbą naturalną, takie że
$$x = \beta^c m.$$

Zadanie 2. Niech $\beta \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą parzystą oraz niech $m = \sum_{k=1}^{\infty} e_{-k}\beta^{-k}$, gdzie $e_{-1} \neq 0$ oraz $e_{-i} \in \{0, 1, \ldots, \beta - 1\}$ dla $i \in \mathbb{N}$. Rozważmy, dla ustalonego $t \in \mathbb{N}$, funkcję
$$\mathrm{rd}_t : m \to m_t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{t} e_{-k}\beta^{-k}, & \text{gdy } 0 \leqslant e_{-(t+1)} \leqslant \dfrac{\beta}{2} - 1 \\ \sum_{k=1}^{t} e_{-k}\beta^{-k} + \beta^{-t}, & \text{gdy } \dfrac{\beta}{2} \leqslant e_{-(t+1)} \leqslant \beta - 1 \end{cases}.$$
Uzasadnij, że
$$|\mathrm{rd}_t(m) - m| \leqslant \frac{1}{2}\beta^{-t}.$$

Zadanie 3. Sprawdź równości:

a) $\mathrm{fl}\,(a + (b + c)) = \mathrm{fl}\,((a + b) + c)\,;$

b) $\mathrm{fl}(a(b + c)) = \mathrm{fl}(ab + ac);$

c) $\mathrm{fl}\,(a^2 - b^2) = \mathrm{fl}\,((a - b)\,(a + b)).$

Zadanie 4. Uzasadnij, że relacja równości w sensie jeden jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich funkcji rzeczywistych określonych na przedziale $[1, \infty)$.

Zadanie 5. Sprawdź poniższe równości w sensie jeden ($K_1, K_2 \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$):

a) $K_1 2^{-t} + K_2 2^{-2t} =_1 K_1 2^{-t};$

b) $\dfrac{K_1 2^{-t}}{1 + K_2 2^{-t}} =_1 K_1 2^{-t};$

c) $K 2^{-2t} =_1 0.$

Zadanie 6. Przypuśćmy, że $a_1 =_1 b_1$ oraz $a_2 =_1 b_2$. Sprawdź poniższe równości w sensie jeden:

a) $a_1 a_2 =_1 b_1 b_2,$

b) $a_1 + a_2 =_1 b_1 + b_2,$

c) $|a_1| + |a_2| = |b_1| + |b_2|.$

Zadanie 7. Sprawdź, czy zachodzą poniższe równości w sensie jeden:

a) $t^2 + 1 + \operatorname{arctg} t \cdot 2^{-t} =_1 t^2 + 1$;

b) $\sin t \cdot 2^{-t} + \cos t \cdot 2^{-2t} =_1 \sin t \cdot 2^{-t}$.

Zadanie 8. Wykaż poniższe zależności:

a) jeżeli $1 + E = (1 + a_1)(1 + a_2)$ oraz $|a_i| \leqslant K_i 2^{-t}$ $(i = 1, 2)$, to $|E| \leqslant_1 (K_1 + K_2)\, 2^{-t}$;

b) jeżeli $1 + E = \dfrac{1 + a_1}{1 + a_2}$ oraz $|a_i| \leqslant K_i 2^{-t}$ $(i = 1, 2)$, to $|E| \leqslant_1 (K_1 + K_2)\, 2^{-t}$;

c) jeżeli $1 + E = \sqrt{1 + a}$ oraz $|a| \leqslant K 2^{-t}$, to $|E| \leqslant_1 \dfrac{1}{2} K 2^{-t}$.

Zestaw 2. Uwarunkowanie, numeryczna poprawność

Zadanie 1. Wyznacz wskaźniki uwarunkowania dla zadań:

a) $w(a, b, c) = ab - 2c$;

b) $w(a, b) = a^2 + b^2$;

c) $w(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$;

d) $w(b) = A^{-1} b$, gdzie $b \in \mathbb{R}^n$; macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest znaną macierzą nieosobliwą;

e) $w(a, b) = a - \sqrt{a^2 - b}$, dla $a^2 - b > 0$.

Zadanie 2. Rozważmy dwa układy równań

$$u_1 : \begin{cases} x + 3y = 4 \\ x + 3,00001y = 4,00001 \end{cases}, \qquad u_2 : \begin{cases} x + 3y = 4 \\ x + 3,00001y = 3,99998 \end{cases}.$$

Rozwiązania tych układów to odpowiednio $(x_1, y_1) = (1, 1)$ dla układu u_1 oraz $(x_2, y_2) = (10, -2)$ dla układu u_2. Pomimo tego, że macierze układów u_1, u_2 są identyczne, a wektory prawych stron różnią się niewiele (norma ich różnicy jest rzędu 10^{-5}), to rozwiązania tych układów różnią się istotnie. Wyjaśnij dlaczego tak się dzieje.

Zadanie 3. Zaproponuj numerycznie poprawne algorytmy wyliczenia poniższych wyrażeń; uzasadnij numeryczną poprawność wskazanych algorytmów.

a) $w(a, b) = \dfrac{a^2}{a^2 + b^2}$, $(a, b) \neq (0, 0)$;

b) $w(a, b, c) = ab + a + c - ac$;

c) $w(a, b, c) = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{a}$, $ab \neq 0$.

Zadanie 4. Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} a^2x - aby = 1 \\ bx + ay = -1 \end{cases},$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$, którego rozwiązaniem jest para (x, y). Zaproponuj numerycznie poprawny algorytm wyliczenia x; wykaż numeryczną poprawność tego algorytmu.

Zadanie 5. Wartość funkcji f w punkcie x obliczono algorytmem numerycznie poprawnym, tj.

$$\mathrm{fl}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(x\left(1+\epsilon\right)\right)\left(1+\delta\right),$$

gdzie $|\epsilon| \leqslant K_1 2^{-t}$, $|\delta| \leqslant K_2 2^{-t}$. Zakładając, że funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^1$, oszacuj błąd względny uzyskanej wartości.

Zestaw 3. Interpolacja wielomianowa

Zadanie 1. Wyznacz wielomian interpolacyjny interpolujący węzły

$$\{(-2,-1), (-1,-1), (1,-1), (2,11)\};$$

zapisz go wykorzystując bazy Lagrange'a oraz Newtona.

Zadanie 3. Wielomian $p\left(x\right) = -x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ interpoluje pięć pierwszych węzłów z poniższej tabeli:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-5	8	5	4	-1	0

Wyznacz wielomian interpolujący całą tabelę.

Zadanie 4. Niech $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ będą wielomianami postaci (3.1) oraz niech $c_i = \varphi_i\left(0\right)$ $(i = 0, \ldots, n)$. Uzasadnij, że

$$\sum_{k=0}^{n} c_k {x_k}^{n+1} = \left(-1\right)^n x_0 \cdots x_n.$$

Zadanie 5. Z jaką dokładnością można obliczyć wartość $\ln 100,5$ przy użyciu wzoru interpolacyjnego mając dane wartości $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$?

Zadanie 6. Funkcję $f \in \mathcal{C}^3_{[a,b]}$ taką, że $\|f^{(3)}\|_\infty \leqslant 1$, przybliżamy funkcją ciągłą p zdefiniowaną w sposób następujący: przedział $[a, b]$ dzielimy na podprzedziały punktami $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ $(i = 0, \ldots, n)$; w każdym z przedziałów $[x_i, x_{i+1}]$ funkcję f przybliżamy wielomianem interpolacyjnym opartym na węzłach x_i, $\frac{1}{2}\left(x_i + x_{i+1}\right)$, x_{i+1} – sklejenie tych wielomianów to funkcja p. Wykaż, że

$$\|f - p\|_\infty \leqslant \frac{\sqrt{3}}{6^3}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3.$$

Zadanie 7. Wykaż, że dla parami różnych punktów $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ oraz funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(x_0,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n} \end{vmatrix};$$

następnie, wykorzystując tę równość, uzasadnij, że

a) dla $f \in \pi_n$: $f(x_0,\ldots,x_n) = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$;

b) dla $f(x) = \dfrac{1}{x}$: $f(x_0,\ldots,x_n) = (-1)^n \prod\limits_{i=0}^{n} \dfrac{1}{x_i}$;

c) jeżeli funkcja f jest parzysta, to $f(-x_0,\ldots,-x_n) = (-1)^n f(x_0,\ldots,x_n)$;

d) jeżeli funkcja f jest nieparzysta, to $f(-x_0,\ldots,-x_n) = (-1)^{n+1} f(x_0,\ldots,x_n)$;

Zadanie 8. Niech $x_0 < \ldots < x_n$ oraz niech $\varphi_i(x) = \prod\limits_{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ $(i = 0,\ldots,n)$. Rozważmy wielomiany

$$A_i(x) = [1 - 2(x-x_i)\varphi_i'(x_i)]\varphi_i^2(x) \qquad \text{oraz} \qquad B_i(x) = (x-x_i)\varphi_i^2(x),$$

dla $i = 0,1,\ldots,n$. Wyznacz $A_i(x_j)$, $B_i(x_j)$, $A_i'(x_j)$ oraz $B_i'(x_j)$. Następnie skonstruuj wielomian $p \in \pi_{2n+1}$ interpolujący funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – każdy o krotności dwa.

Zadanie 9. Wyznacz wielomian $f \in \pi_4$ spełniający warunki:

x	0	1
$f(x)$	1	1
$f'(x)$	2	0
$f''(x)$		6

Zadanie 10. Wykaż, że wielomian $w \in \pi_n$ interpolujący funkcję parzystą $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w $n+1$ różnych punktach węzłowych $x_0,\ldots,x_n$ położonych symetrycznie względem zera (tj. jeżeli x_i jest węzłem, to $-x_i$ też) również jest funkcją parzystą. Czy podobne stwierdzenie, ale dotyczące wielomianu interpolacyjnego Hermite'a interpolującego funkcję parzystą w węzłach $x_0,\ldots,x_k$ o łącznej krotności $n+1$ i położonych symetrycznie względem zera również jest prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij, negatywną podając stosowny przykład.

Zadanie 11. Niech $f : [0,\pi] \ni x \to \cos x \in [-1,1]$ oraz niech H_2 będzie wielomianem interpolującym funkcję f w węzłach $x_0 = 0$ (podwójny) oraz $x_1 = \alpha$, $\alpha \in [0,\pi]$ (pojedynczy). Wyznacz wartość parametru α, dla którego oszacowanie błędu interpolacji $\|f - H_2\|_\infty$ jest najlepsze (tj. przyjmuje najmniejszą wartość).

Zadanie 12. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$, niech $x_1 < \ldots < x_n$ oraz niech $y_0,\ldots,y_n \in \mathbb{R}$. Rozważmy następujące zadanie interpolacyjne:

Znaleźć wielomian $H \in \pi_n$ spełniający warunek

$$H(x_i) = y_i \quad (i = 1,\ldots,n), \quad H'(x_0) = y_0. \tag{4.1}$$

- Uzasadnij, że problem (4.1) ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $w'(x_0) \neq 0$, gdzie $w(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$.
- Sformułuj warunek konieczny i wystarczający dla istnienia dokładnie jednego rozwiązania $H \in \pi_n$ problemu
$$H(x_i) = y_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad H^{(k)}(x_0) = y_0,$$
gdzie $k \in \{1, \dots, n\}$ jest ustalone.

Zadanie 13. Wykorzystując algorytm różnic dzielonych wyznacz wielomian $w \in \pi_2$ interpolujący poniższą tabelę

x_i	-2	-1	1
w_i	1	0	4

;

następnie, opierając się na rozwiązaniu poprzedniego zadania, zmodyfikuj go tak, aby otrzymać wielomian h możliwie niskiego stopnia, który dodatkowo spełnia warunek:

(a) $h''(0) = -2$;

(b) $h''(-2/3) = -2$.

Zadanie 14. Wielomian $p \in \pi_n$ interpoluje funkcję różniczkowalną f w punktach $x_0 < \ldots < x_n$. Czy wielomian p' interpoluje funkcję f'? Jeżeli tak, podaj błąd tej interpolacji (przy założeniu, że $f \in \mathcal{C}^{n+1}$).

Zestaw 4. Interpolacja funkcjami sklejanymi oraz trygonometryczna

Zadanie 1. Wyznacz kubiczną funkcję sklejaną S spełniającą warunki:
$$S(0) = 1, \; S(1) = 0, \; S(2) = 2, \; S''(0) = S''(2) = 0.$$

Zadanie 2. Czy funkcja S postaci
$$S(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x & \text{dla } x \in [-1, 0] \\ -x^3 + 3x^2 + 3x & \text{dla } x \in (0, 1] \end{cases}$$
jest zawężeniem do przedziału $[-1, 1]$ pewnej naturalnej kubicznej funkcji sklejanej dla podziału $\{-1, 0, 1\}$? Odpowiedź uzasadnij, a jeżeli jest ona pozytywna wyznacz wartość $S(-2) + S(2)$.

Zadanie 3. Niech $x_1 < \ldots < x_n$ oraz niech $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Wyznacz funkcję S spełniającą następujące warunki:

(w$_1$) $S(x_i) = y_i \quad (i = 1, \ldots, n)$;

(w$_2$) $S \in \mathcal{C}^{n-1}_{\mathbb{R}}$;

(w$_3$) $S^{(n)}(x) = \begin{cases} a, & \text{dla } x < \xi \\ b, & \text{dla } x > \xi \end{cases}, \; \xi \in \{x_1, \ldots, x_n\}.$

Zadanie 4. Niech $0 \leqslant x_1 < \ldots < x_{2n} < 2\pi$. Uzasadnij, że funkcja

$$t_{2n}(x) = \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{x - x_k}{2}$$

jest wielomianem trygonometrycznym stopnia $2n$, tj.

$$t_{2n}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

dla pewnych stałych $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5. Uzasadnij, że trygonometryczny wielomian interpolacyjny

$$t_{2n}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

interpolujący funkcję f w węzłach $0 \leqslant x_0 < \ldots < x_{2n} < 2\pi$ można wyrazić w postaci

$$t_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\, \psi_k(x),$$

gdzie, dla $k = 0, \ldots, 2n$,

$$\psi_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{\sin \frac{x - x_j}{2}}{\sin \frac{x_k - x_j}{2}}.$$

Zadanie 6. Wyznacz trygonometryczny wielomian interpolacyjny interpolujący funkcję

$$[0, 2\pi) \ni x \to \cos^2 x - |\sin 2x| \in \mathbb{R}$$

w punktach $x_k = \dfrac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

Zadanie 7. Wielomian trygonometryczny

$$t_2(x) = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} e^{ix} + \frac{5}{4} e^{2ix}$$

interpoluje funkcję $f(x) = \left(\sqrt{3}|\sin x| - 2\right)^2$ w punktach $x_0 = 0$, $x_1 = 2\pi/3$, $x_2 = 4\pi/3$. Wykorzystując tę informację wyznacz wielomian trygonometryczny t_3 interpolujący funkcję f również w punkcie $x_3 = \pi$.

Zadanie 8. Funkcję $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ spełniającą warunek

$$\forall x \in (0, 2\pi): \qquad f(2\pi - x) = f(x)$$

nazwiemy funkcją parzystą; funkcję $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ spełniającą warunek

$$\forall x \in (0, 2\pi): \qquad f(2\pi - x) = -f(x)$$

nazwiemy funkcją nieparzystą.

Jakiej postaci są wielomiany trygonometryczne będące funkcjami parzystymi (nieparzystymi)?

Zadanie 9. Niech $x_k = \frac{2k\pi}{n+1}$, dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Niech t_n będzie wielomianem trygonometrycznym interpolującym funkcję parzystą (w sensie definicji z poprzedniego zadania) w węzłach x_0,$x_1, \ldots, x_n$. Czy wielomian trygonometryczny t_n jest również funkcją parzystą?

Zestaw 5. Aproksymacja

Zadanie 1. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z normą $\|(x,y)\| = \max\{|x|, |y|\}$. Wyznacz elementy optymalne dla elementu $u = (2,0)$ względem podprzestrzeni $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$. Podaj błąd aproksymacji.

Zadanie 2. Uzasadnij, że zbiór elementów optymalnych jest zbiorem wypukłym.

Zadanie 3. Znajdź element optymalny w sensie aproksymacji średniokwadratowej (tj. w sensie normy określonej przez naturalny iloczyn skalarny przestrzeni X) dla elementu u w podprzestrzeni V przestrzeni X; podaj błąd aproksymacji:

a) $X = \mathcal{L}_2([0,1])$, $V = \pi_1$, $u(x) = 2x^2 + 2$;

b) $X = \mathcal{L}_2\left([-1,1], \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, $V = \pi_2$, $u(x) = (x+1)^3$;

c) $X = \mathcal{L}_2\left([-1,1], \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, $V = \pi_n$, $u \in \pi_{n+1}$;

d) $X = \mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}, e^{-x^2}\right)$, $V = \pi_1$, $u(x) = x^2$;

e) $X = \mathcal{L}_2([1,e])$, $V = \pi_1$, $u(x) = \ln(x)$;

f) $X = \mathcal{L}_2([-1,1])$, $V = \pi_1$, $u(x) = \sin(x)$.

Zadanie 4. Niech $X = \mathcal{L}_2(-a,a)$ $(a > 0)$ oraz niech $u \in X$ będzie dowolną funkcją parzystą (nieparzystą). Niech u^* będzie elementem optymalnym w sensie aproksymacji średniokwadratowej dla funkcji u w podprzestrzeni π_n. Czy u^* również jest funkcją parzystą (nieparzystą)?

Zadanie 5. Wyznacz te wartości parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$, dla których bryła powstała przez obrót wykresu funkcji $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ na przedziale $[-1,1]$ wokół osi Ox ma najmniejszą objętość. Wyznacz tę objętość.

Zadanie 6.* Niech X będzie przestrzenią skończenie wymiarową, niech $V \subset X$ będzie jej podprzestrzenią liniową oraz niech $f \in X$ oraz $h^* \in V$ będą dowolnymi ustalonymi elementami. Czy w przestrzeni X można zdefiniować iloczyn skalarny tak, aby element h^* był elementem optymalnym (w sensie normy zdefiniowanej przez ten iloczyn skalarny) dla elementu f?

Zadanie 7. Znajdź element optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej (tj. w sensie normy supremum) dla elementu u w podprzestrzeni V przestrzeni X; podaj błąd aproksymacji:

a) $X = \mathcal{C}_{[-1,1]}$, $V = \pi_m$, $u(x) = x^{m+1}$;

b) $X = \mathcal{C}_{[-1,1]}$, $V = \pi_{m-1}$, $u(x) = x^{m+1}$;

c) $X = \mathcal{C}_{[1,e]}$, $V = \pi_0$, $u(x) = \ln x$;

d) $X = \mathcal{C}_{[1,e]}$, $V = \pi_1$, $u(x) = \ln x$;

e) $X = \mathcal{C}_{[0,2]}$, $V = \pi_2$, $u(x) = 4x^3 - 11x^2 + 10x$;

f) $X = \mathcal{C}_{[-1,1]}$, $V = \pi_1$, $u(x) = \exp|x|$.

Zadanie 8. Niech $X = \mathcal{C}_{[0,1]}$. Wyznacz elementy optymalne względem podprzestrzeni π_1 w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji $u_1(x) = x^2$, $u_2(x) = x^3$ oraz $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$.

Zadanie 9. Niech $X = \mathcal{C}_{[-1,1]}$ oraz niech $V = \operatorname{span}\{f\}$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x \in [-1, 0] \\ x + 1 & \text{dla } x \in (0, 1] \end{cases}.$$

Wyznacz element optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej dla elementu $u(x) = 1$ względem podprzestrzeni V.

Zadanie 10. Niech $X = \mathcal{C}_{[a,b]}$. Uzasadnij, że element optymalny w przestrzeni $V = \pi_n$ w sensie aproksymacji jednostajnej dla dowolnej funkcji $u \in X$ jest wielomianem interpolującym tę funkcję.

Zadanie 11. Niech $X = \mathcal{C}_{[-a,a]}$ $(a > 0)$ oraz niech $u \in X$ będzie dowolną funkcją parzystą (nieparzystą). Niech u^* będzie elementem optymalnym dla funkcji u w skończenie wymiarowej przestrzeni V spełniającej warunek Haara. Czy u^* również jest funkcją parzystą (nieparzystą)?

Zadanie 12. Niech $X = \mathcal{C}_{[a,b]}$ oraz niech u_i^* będzie elementem optymalnym w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji u_i $(i = 1, 2)$ względem podprzestrzeni liniowej $V \subset X$. Czy $\alpha_1 u_1^* + \alpha_2 u_2^*$ jest elementem optymalnym dla funkcji $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$?

Zestaw 6. Kwadratury

Zadanie 1. Znajdź rząd i wyrażenie na błąd dla kwadratury interpolacyjnej przybliżającej całkę

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{6.1}$$

i opartej na informacji $f(a)$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $f''\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $f(b)$.

Zadanie 2. Całkę $I(f) = \int_2^4 f(x)\,dx$ przybliżamy kwadraturą

$$S(f) = A_1 f(a) + A_2 f(3) + A_3 f(b) + A_4 f'(b),$$

gdzie $a, b \in [2, 4]$. Dobierz współczynniki A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ oraz węzły a, b, dla których rząd kwadratury S jest największy; wyznacz ten rząd.

Zadanie 3. Całkę (6.1) przybliżamy kwadraturą interpolacyjną S opartą na węzłach: a (podwójny) oraz $x_0 \in (a, b)$ (pojedynczy). Dobierz taką wartość x_0, aby kwadratura S miała maksymalny rząd; wyznacz ten rząd.

Zadanie 4. Zbadaj rząd kwadratury

$$S(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(s-h) + f(s+h)\right),$$

gdzie $s = \dfrac{a+b}{2}$, $h = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$, przybliżającej całkę (6.1).

Zadanie 5. Całkę $I(f) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$ przybliżamy kwadraturą interpolacyjną

$$S(f) = A_1 f(-a) + A_2 f(0) + A_3 f(a),$$

gdzie $a \in (0, 1)$. Co możemy powiedzieć o rzędzie tej kwadratury?

a) Jest równy 2 dla pewnego a.

b) Niezależnie od wybory a, rząd wynosi co najmniej 3.

c) Jest równy 3 dla pewnego a.

d) Jest równy 6 dla pewnego a.

Zadanie 6. Udowodnij, że jeśli kwadratura interpolacyjna przybliżająca całkę

$$I(f) = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

oparta jest na nieparzystej liczbie węzłów rozłożonych symetrycznie względem zera (tj. jeżeli x_i jest węzłem, to $-x_i$ również), to jej rząd jest większy niż liczba węzłów.

Zestaw 7. Równania nieliniowe

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność zmodyfikowanej metody siecznych

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k}{f(x_k) - f(0)} f(x_k) \end{cases}$$

zastosowanej do równania $x^3 - 2 = 0$.

Zadanie 2. Wykaż, że metoda Newtona

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{A}$$

zastosowana do równania $x^7 - a = 0$ $(a > 0)$ jest zbieżna do jego rozwiązania niezależnie od sposobu wyboru przybliżenia początkowego $x_0 > 0$.

Zadanie 3. Wykaż globalną zbieżność metody Newtona (A) stosowanej do wypukłej, rosnącej funkcji $f \in \mathcal{C}^2_{\mathbb{R}}$ mającej zero jednokrotne.

Wskazówka: wykorzystując równość $e_{k+1} = \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)} e_k^2$ pokaż monotoniczność oraz ograniczoność ciągu $\{x_k\}$.

Zadanie 4. Niech p będzie wielomianem stopnia $n \geqslant 2$, którego wszystkie pierwiastki $\xi_1, \ldots, \xi_n$ są rzeczywiste; załóżmy, że są one uporządkowane monotonicznie, tj.

$$\xi_1 \geqslant \xi_2 \geqslant \cdots \geqslant \xi_n.$$

Uzasadnij, że dla dowolnego $x_0 > \xi_1$ metoda Newtona zwraca ciąg $\{x_k\}$ zbieżny do ξ_1.

Zadanie 5. Zakładając zbieżność poniższych metod iteracyjnych stosowanych do równania $f(\alpha) = 0$, wyznacz ich wykładniki zbieżności:

a) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_0)}$ $(k \in \mathbb{N})$, gdzie $f'(x_0) \neq 0$;

b) $x_{k+1} = x_k - r\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $(k \in \mathbb{N})$, gdzie r – krotność α jako zera funkcji f.

Zadanie 6. Wykaż twierdzenie o lokalnej zbieżności metody

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)},$$

gdzie $u(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, stosowanej do równania $f(\alpha) = 0$. Przyjmij dostateczną regularność funkcji f (jaka to regularność?).

Zestaw 8. Równania liniowe

Zadanie 1. Wykorzystując algorytm eliminacji Gaussa w dwóch wariantach: bez wyboru elementu głównego oraz z wyborem elementu głównego w kolumnie, wyznacz dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jej rozkłady LU oraz PLU, gdzie $L, U \in \mathbb{R}^{3\times3}$ to macierze trójkątne (odpowiednio, dolna oraz górna), a $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ to macierz ortogonalna.

Zadanie 2. Do układu równań liniowych $Ax = b$ o macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ postaci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{pmatrix},$$

gdzie $a \geqslant 1$, zastosowano metodę eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego w kolumnie. Wyznacz macierze trójkątne $L, U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wynikające z zastosowanej metody i dające rozkład $A = LU$.

Zadanie 3. Znajdź obraz wektora $(0, \ldots, 0, 1)^T$ przy elementarnym przekształceniu Householdera przeprowadzającym wektor $(1, 0, \ldots, 0)^T$ na kierunek wektora $(1, \ldots, 1)^T$.

Zadanie 4. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Wykorzystując algorytm Householdera wyznacz rozkład QR macierzy A, gdzie $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jest macierzą ortogonalną, a $R = [r_{ij}] \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ jest macierzą uogólnioną trójkątną górną, tj. $r_{ij} = 0$ dla $i > j$.

(b) Wykorzystując algorytm Grama-Schmidta wyznacz rozkład QR macierzy A, gdzie $Q \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ jest macierzą ortogonalną (tj. $Q^T Q = I_2$), a $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ jest macierzą trójkątną górną.

Zadanie 5. Wyznacz rozkłady ortogonalno-trójkątne macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

zastosuj algorytmy Grama-Schmidta oraz Householdera.

Zadanie 6. Uzasadnij, że jeżeli macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest nieosobliwa, to istnieje dla niej dokładnie jeden rozkład ortogonalno-trójkątny QR, gdzie $Q, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, w którym elementy diagonalne macierzy R są dodatnie.