Zestaw 1. Liczby zespolone

1. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiory:

$$\begin{array}{ll} A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z+2| < 4\}, & B = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = |z-1|\}, \\ C = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(iz-1) \leqslant 2\}, & D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2)\operatorname{Im}(z^2) < 0\}, \\ E = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z+iz) = \pi\}, & F = \{z \in \mathbb{C} : \pi/2 < \arg(z^3) < 3\pi/2\}. \end{array}$$

2. Wykaż, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ prawdziwa jest nierówność

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

3. Przedstaw w postaci trygonometrycznej i wykładniczej liczby zespolone

$$\text{(a)}\ -3+3i, \qquad \text{(b)}\ \frac{\sqrt{3}-i}{-1-i}, \qquad \text{(c)}\ \sin\alpha + i\cos\alpha, \qquad \text{(d)}\ 1 + i\operatorname{tg}\alpha,\ \alpha \neq \pi/2 + k\pi.$$

4. Wyznacz części rzeczywiste oraz urojone liczb

$$\text{(a)}\ \left(-\sqrt{3}+i\right)^{10}, \qquad \text{(b)}\ \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{i-1}\right)^{12}, \qquad \text{(c)}\ \left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{6}, \qquad \text{(d)}\ \left(\sin\frac{\pi}{7}-i\cos\frac{\pi}{7}\right)^{14}.$$

5. Podane liczby zapisz w postaci trygonometrycznej ($n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$):

$$\text{(a)}\ -(\cos x + i\sin x)^n, \qquad \text{(b)}\ (\sin x + i\cos x)^n, \qquad \text{(c)}\ (\sin x - i\cos x)^n, \qquad \text{(d)}\ (\cos x + i\cos x)^n.$$

6. Wyznacz zbiory

$$\text{(a)}\ \sqrt{1-\sqrt{3}i}, \qquad \text{(b)}\ \sqrt[3]{-64}, \qquad \text{(c)}\ \sqrt[4]{(2-i)^8}, \qquad \text{(d)}\ \sqrt{3+4i}.$$

7. Ile wynosi suma wszystkich pierwiastków algebraicznych stopnia n z 1?

8. Niech $\{z_0, z_1, \ldots, z_9\} = \sqrt[10]{\cos 1 + i\sin 1}$. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{|z_0| + 2|z_1| + 3|z_2| + 4|z_3| + 5|z_4|}{z_5^{20} + 2z_6^{20} + 3z_7^{20} + 4z_8^{20} + 5z_9^{20}} \cdot (-\sin 2 + i\cos 2).$$

9. Jednym z wierzchołków sześciokąta foremnego jest $w_0 = \sqrt{3} + i$. Wyznacz pozostałe jego wierzchołki wiedząc, że środek leży w punkcie: (a) $s_0 = 0$; (b) $s_0 = 2\sqrt{3} + 1$.

10. ☠ Wykaż, że w ciągu $a_n = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n$ nie występują dwa identyczne wyrazy.

11. Wyznacz miejsca zerowe wielomianu $W(z) = z^3 - (2+3i)^9$.

12. Rozwiąż równanie:

(a) $z^5 + z^4 + (i-1)z + i - 1 = 0$, (b) $z^4 + 4z^2 + 8 = 0$,

(c) $(z^2 + 1 + i)^4 + (1+2i)^4 = 0$, (d) $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$.

13. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu

$$W(z) = z^6 + 2z^5 + 4z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 2z + 2\,,$$

którego podwójnym pierwiastkiem jest $z_0 = i$. Następnie przedstaw wielomian W w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych możliwie niskich stopni.

14. Liczba $z_0 = 5 + 2i$ jest jednym z pierwiastków wielomianu

$$W(z) = (z^3 - 11z^2 + 39z - 29)(z^4 - (2-i)^{12});$$

wyznacz pozostałe jego pierwiastki oraz wybierz z nich te, które leżą w drugiej ćwiartce płaszczyzny zespolonej.

15. ☠ Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu

$$w(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n;$$

następnie przedstaw go jako iloczyn rzeczywistych wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.

16. Rozwiąż równanie:

(a) $z^7 = \bar{z}(1-i)$, (b) $\overline{\bar{z}z^4} = z|z|^2$, (c) $\bar{z}z^4 = |z|^2\bar{z}^3$, (d) $|z|^2\bar{z} = -iz^2$.

Zestaw 2. Elementy teorii liczb

1. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznacz największe wspólne dzielniki $\mathrm{NWD}(a,b)$ liczb a,b oraz przedstaw je jako kombinacje całkowitoliczbowe, tj. $\mathrm{NWD}(a,b) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Wskaż pary liczb względnie pierwszych.

   (a) $a = 252, b = 231$, (b) $a = 924, b = 1105$, (c) $a = 2891, b = 1589$, (d) $a = 645, b = 363$.

2. Uzasadnij, że istnieją liczby całkowite x, y spełniające poniższe równanie
$$412x + 119y = 1;$$
   wyznacz przykładową parę takich liczb.

3. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczby $5n + 3$ oraz $7n + 4$ są względnie pierwsze.

4. Wyznacz element odwrotny dla elementu

   (a) 4 w $\mathbb{Z}_7^*$, (b) 35 w $\mathbb{Z}_{101}^*$, (c) 11 w $\mathbb{Z}_{31}^*$, (d) 24 w $\mathbb{Z}_{29}^*$, (e) 11 w $\mathbb{Z}_{120}^*$.

5. Uzasadnij, że liczba naturalna jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr w rozwinięciu dziesiętnym jest liczbą podzielną przez 3. Sformułuj i uzasadnij cechy podzielności liczby naturalnej przez 9 oraz przez 11.

6. Klasyczna cecha podzielności liczby naturalnej przez 7 jest mało wygodna do sprawdzania: liczba jest podzielna przez 7, jeśli różnica między liczbą składającą się z trzech ostatnich jej cyfr, a liczbą wyrażoną pozostałymi jej cyframi (lub odwrotnie) dzieli się przez 7.

   Wykaż, że liczba naturalna jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr w rozwinięciu ósemkowym jest liczbą podzielną przez 7. Wykorzystując to kryterium sprawdź podzielność przez 7 liczby 812.

7. Rozwiąż kongruencje:

   (a) $7x = 3 \pmod{12}$, (b) $10x = 13 \pmod{23}$, (c) $6x = 9 \pmod{45}$, (d) $12x = 2 \pmod{8}$.

8. Rozwiąż układ kongruencji:
$$\text{(a)} \quad \begin{cases} x = 4 \pmod{6} \\ x = 5 \pmod{35} \end{cases}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} x = 4 \pmod{5} \\ x = 3 \pmod{7} \\ x = 2 \pmod{9} \end{cases}.$$

9. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez $4, 13$ oraz 7 daje odpowiednio reszty $1, 2$ oraz 1.

10. Jeśli podzielić czekoladę na cztery równe części, zostaną dwie kostki; przy podziale na pięć części pozostaną cztery kostki, a przy podziale na trzy części pozostanie jedna kostka. Ile kostek pozostanie przy podziale czekolady na dziesięć równych części?

Zestaw 3. Grupy, pierścienie, ciała

1. Sprawdź, czy poniższe pary tworzą grupę abelową:
   (a) zbiór $\mathbb{Z}$ z działaniem $x \circ y = (-1)^x\, y + (-1)^y\, x$;
   (b) zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ z działaniem $a \circ b = a^{\ln b}$;
   (c) zbiór $\mathbb{C}$ z działaniem $w \circ z = w + z + iwz$;
   (d) zbiór $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ z działaniem $w \circ z = w + z + iwz$.
2. Wyznacz rząd grupy: (a) $\mathbb{Z}^*_{120}$, (b) $\mathbb{Z}^*_{93}$, (c) $\mathbb{Z}^*_{200}$.
3. Znajdź wszystkie podgrupy grupy: (a) $\mathbb{Z}_6$, (b) $\mathbb{Z}^*_6$, (c) $\mathbb{Z}^*_8$.
4. Wypisz wszystkie elementy grupy i podaj ich rzędy: (a) $\mathbb{Z}^*_5$, (b) $\mathbb{Z}^*_9$, (c) $\mathbb{Z}^*_{15}$.
5. Sprawdź, czy grupy z poprzedniego zadania są cykliczne oraz wyznacz wszystkie generatory tych z nich, które są cykliczne.
6. Sprawdź, czy zbiór $\mathbb{Z}$ z działaniem $n \circ k = n + k + 1$ tworzy grupę cykliczną; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz wszystkie jej generatory.
7. Wyznacz trzy ostatnie cyfry liczby: (a) 17^{2002}, (b) $7^{4004} - 3^{4004}$.
8. Sprawdź, która z poniższych struktur algebraicznych jest pierścieniem, pierścieniem przemienny, pierścieniem z jednością, pierścieniem całkowitym, ciałem, ciałem przemiennym:
   (a) zbiór wielomianów rzeczywistych z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia wielomianów;
   (b) zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych;
   (c) $(A, \star, \bullet)$, gdzie $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leqslant x < 1\}$ oraz $a \star b = \min(a, b)$, $a \bullet b = \max(a, b)$;
   (d) $(\mathbb{R}[x]_1, +, \circ)$, gdzie $+$ oraz $\circ$ oznaczają dodawanie oraz składanie funkcji.
9. Udowodnij, że
   (a) zbiór $A = \{m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem dodawania liczb zespolonych tworzy grupę;
   (b) zbiór $B = \{2^n 3^m : m, n \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem mnożenia liczb tworzy grupę;
   (c) grupy A i B są izomorficzne.
10. Udowodnij, że
    (a) zbiór $A = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ z działaniami dodawania i mnożenia liczb jest pierścieniem;
    (b) odwzorowanie $f : A \ni a + b\sqrt{3} \longrightarrow a - b\sqrt{3} \in A$ jest automorfizmem pierścienia $(A, +, \cdot)$ w siebie.
11. Wykaż, że w dowolnym pierścieniu dzielnikami zera mogą być jedynie te elementy, które nie posiadają elementu odwrotnego.

12. Niech $A = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ będzie pierwiastkiem algebraicznym stopnia czwartego z jedności, tj. $\varepsilon_k^4 = 1$ dla $k = 0, 1, 2, 3$.

    (a) Wykaż, że zbiór A z działaniem mnożenia liczb zespolonych tworzy grupę. Sprawdź, czy jest to grupa cykliczna, a w przypadku pozytywnej odpowiedzi wskaż wszystkie jej generatory.

    (b) Wyznacz wszystkie homomorfizmy grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ w grupę $(A, \cdot)$. Czy któryś z tych homomorfizmów jest izomorfizmem?

13. Uzasadnij, że każda grupa cykliczna rzędu n jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{Z}_n, +)$.

14. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

    (a) Każda grupa, której rząd jest liczbą pierwszą jest grupą cykliczną.

    (b) Wszystkie grupy cykliczne tego samego rzędu $n \in \mathbb{N}$ są izomorficzne.

    (c) Grupa cykliczna rzędu $n \in \mathbb{N}$ jest izomorficzna z grupą cykliczną rzędu $m \in \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m = n$.

    (d) Jeżeli A jest grupą cykliczną rzędu $n \in \mathbb{N}$, a $h : A \to B$ jest homomorfizmem grup, to grupa B również jest grupą cykliczną rzędu n.

    (e) Jeżeli A jest grupą cykliczną rzędu $n \in \mathbb{N}$, a $h : A \to B$ jest izomorfizmem grup, to grupa B również jest grupą cykliczną rzędu n.

15. Wykaż, że odwzorowanie h jest homomorfizmem grupy G_1 w grupę G_2; następnie sprawdź, czy jest ono izomorfizmem:

    (a) $h(z) = |z|$, $G_1 = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$;

    (b) $h(n) = n - 3$, $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$, $G_2 = (\mathbb{Z}, \circ)$, gdzie $m \circ n = m + n + 3$;

    (c) $h(x) = \ln x$, $G_1 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{R}, +)$;

    (d) $h(z) = z^5$, $G_1 = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{C}^*, \cdot)$;

    (e) $h(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx$, $G_1 = (\mathcal{C}_{[0,1]}, +)$, $G_2 = (\mathbb{R}, +)$;

    (f) $h(A) = (\det A)^2$, $G_1 = (M^*_{n\times n}(\mathbb{R}), \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$, gdzie $M^*_{n\times n}(\mathbb{R})$ to zbiór nieosobliwych macierzy rzeczywistych wymiaru $n \times n$.

16. ☠ Znajdź wszystkie homomorfizmy grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ w grupę $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Zestaw 4. Przestrzenie wektorowe

1. Sprawdź, czy podana struktura jest przestrzenią wektorową:
   (a) $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, +, \circ)$, gdzie $x + y = xy$ oraz $\alpha \circ x = x^\alpha$;
   (b) $(\mathbb{R}[x]_n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $+$ oraz $\cdot$ to naturalne działania dodawania wielomianów oraz mnożenia wielomianu przez skalar;
   (c) $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $+$ to naturalne działanie dodawania w $\mathbb{R}^n$ oraz dla $\alpha \in \mathbb{R}$ i $x = (x_1, \ldots, x_n)$
   $$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, x_2 \ldots, x_n);$$
   (d) $(\mathcal{W}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}[x]_n : w(-1) + w(1) = 0\}$; działania to naturalne działania dodawania wielomianów oraz mnożenia wielomianu przez skalar;
   (e) $(\mathcal{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) - 2\,\mathrm{Im}(z) = 0\}$; działania to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych;
   (f) $(\mathcal{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$, gdzie $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) - 2\,\mathrm{Im}(z) = 0\}$; działania to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych
2. Niech $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ oznacza przestrzeń wektorową wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez skalar. Który ze zbiorów tworzy podprzestrzeń wektorową tej przestrzeni?
   (a) $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f\text{– funkcja parzysta}\}$;
   (b) $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz} f'' = f - f'\}$;
   (c) $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1)f(2) = 0\}$.
3. Zbadaj liniową niezależność wektorów:
   (a) $v_1 = (1, 2, -1), v_2 = (0, -5, 1), v_3 = (3, 1, 0)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$;
   (b) $v_1 = (1, -2, 3), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (-1, -2, 1)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$;
   (c) $v_1(x) = 1, v_2(x) = \sin x, v_3(x) = \cos x$ w przestrzeni $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$;
   (d) $v_1(x) = e^x, v_2(x) = e^{2x}, v_3(x) = e^{2(x-1)}$ w przestrzeni $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.
4. Wyznacz przykładowe bazy oraz wymiary przestrzeni wektorowych z zadania 1.
5. Wyznacz bazę przestrzeni wektorowej (wszystkie przestrzenie rozważamy nad ciałem liczb rzeczywistych z naturalnymi działaniami):
   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$;
   (b) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0, 2x - 3z + 2w = 0\}$;
   (c) $\{w \in \mathbb{R}[x]_2 : w(1) - w'(2) = 0\}$.
6. Niech $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}[x]_n$ będą dowolnymi wielomianami takimi, że $\deg f_k = k$ $(k = 0, \ldots, n)$. Uzasadnij, że wielomiany $f_0, f_1, \ldots, f_n$ stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$.

7. Dla dowolnych, ustalonych, parami różnych liczb $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ definiujemy wielomiany $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$,

$$\varphi_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j), \qquad i = 0, \ldots, n.$$

   (a) Uzasadnij, że $\deg \varphi_k = n$, dla $k = 0, \ldots, n$.

   (b) Wykaż, że wielomiany $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ stanowią bazę przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]_n$.

8. Znajdź współrzędne wektora v w bazie B:

   (a) $v = (1, 2, 1); B = \big((0, 1, 1), (-1, 2, 1), (-1, 0, 1)\big)$;

   (b) $v = (1, 2, 1); B = \big((2, -1, -1), (-1, 4, -3), (-3, 2, 0)\big)$;

   (c) $v(x) = x^2 - 1; B = \big(1, x - 2, (x - 2)(x - 3)\big)$;

   (d) $v(x) = x^2; B = \big(x^2 - x, x^2 + x, x^2 - 1\big)$.

9. Wektory v_1, v_2, v_3 są bazą pewnej przestrzeni wektorowej. Który z poniższych zbiorów również jest jej bazą?

   (a) $v_1 + 2v_2 + v_3,\ v_2 - v_3,\ v_1 + 3v_3$;

   (b) $v_1 + v_2 + v_3,\ v_2 + v_3,\ v_3$;

   (c) $v_1 + v_2 + v_3,\ v_1 - v_2 + v_3,\ v_1 + v_2 - v_3$.

10. ☠ Zbiory $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R}$ posiadają nieskończenie wiele elementów, jednak nie wszystkie te zbiory są równoliczne. Można pokazać, że

$$\aleph_0 = \#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} < \#\mathbb{R} = \mathfrak{c};$$

    symbol $\#$ oznacza liczbę elementów zbioru.

    Rozważmy przestrzeń wektorową $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$; działania to naturalne działania dodawania oraz mnożenia liczb. Uzasadnij, że $\dim(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot) > \aleph_0$. Nieprzeliczalna baza przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ to tzw. *baza Hamela*.

11. Wykaż liniową niezależność wektorów w przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$:

   (a) $v_1 = 1, v_2 = \sqrt{2}$;

   (b) $v_1 = \sqrt{2}, v_2 = \sqrt{3}, v_3 = \sqrt{6}$;

   (c) $v_1 = 1, v_2 = \sqrt{2}, v_3 = \pi$.[1]

12. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

   (a) Z dowolnej bazy przestrzeni wektorowej można wybrać bazę dowolnej jej podprzestrzeni wektorowej.

   (b) Bazę dowolnej podprzestrzeni wektorowej można uzupełnić do bazy całej przestrzeni.

   (c) Z dowolnego zbioru wektorów generujących całą przestrzeń liniową można wybrać jej bazę.

   (d) Z każdego zbioru wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej można wybrać jej bazę.

   (e) Każda rzeczywista przestrzeń wektorowa posiada nieskończenie wiele baz.

[1]Liczbę rzeczywistą będącą miejscem zerowym wielomianu o współczynnikach całkowitych nazywamy *liczbą algebraiczną*. Dowolna liczba wymierna p/q, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, jako miejsce zerowe wielomianu o współczynnikach całkowitych $x \to qx - p$, jest liczbą algebraiczną. Podobnie, liczba $\sqrt{2}$, jako miejsce zerowe wielomianu $x \to x^2 - 2$, jest liczbą algebraiczną. Można wykazać, że zbiór wszystkich liczb algebraicznych z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb jest ciałem. Przykładami liczb niealgebraicznych (czyli *liczb przestępnych*) są π oraz e. Fakt ten może być przydatny w rozwiązaniu zadania 11(c).

Zestaw 5. Macierze

1. Sprawdź, czy:

   (a) struktura $(M_{n\times m}(\mathbb{R}), +)$ jest grupą abelową, $+$ to naturalne działanie dodawanie macierzy?

   (b) struktura $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), \cdot)$ jest grupą abelową, $\cdot$ to naturalne działanie mnożenia macierzy?

   (c) struktura $(A, +, \cdot)$ jest ciałem, gdzie $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $+$ oraz $\cdot$ to naturalne działania dodawania oraz mnożenia macierzy?

   (d) struktura $(M_{n\times m}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową, działania to naturalne działania dodawania macierzy oraz mnożenia macierzy przez skalar? W przypadku pozytywnej odpowiedzi, podaj bazę tej przestrzeni.

2. Niech
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Znajdź macierz X spełniającą równanie

   (a) $4(A - X) + 5(3X + B) = A - B + 8X$;

   (b) $B^T X = [1\ 1\ 0]^T$.

3. Wyznacz $f(A)$, jeżeli $f(x) = x^2 - 5x + 3$ oraz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

4. ☠ Uzasadnij, że dla dowolnej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ istnieje wielomian rzeczywisty f, taki że $f(A) = 0$.

5. Rozwiąż macierzowy układ równań
$$\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

6. Oblicz wyznaczniki podanych macierzy:
$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

7. Uzasadnij, że wyznacznik macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $(n > 1)$ o wyrazach nieparzystych jest liczbą parzystą.

8. Jaką wartość może przyjąć wyznacznik macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ spełniającej równanie:
$$\text{a) } A^2 = A^T; \quad \text{(b) } A^T - A^{-1} = 0; \quad \text{(c) } A^2 + A^{-1} = 0; \quad \text{(d) } A^3 - 4A^{-1} = 0.$$

9. Niech A będzie macierzą kwadratową o elementach rzeczywistych. Oblicz $\det(2A)$ wiedząc, że $\det(3A) = 54$ oraz $\det(4A) = 128$.

10. Liczby 1798, 2139, 3255, 4867 dzielą się przez 31. Uzasadnij, że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

również dzieli się przez 31.

11. Nie obliczając wyznaczników znajdź rozwiązania podanych równań:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6-x & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & x \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 & 3 \\ -1 & 1-x^2 & -9 & -3 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & x^2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

12. Wyznacz macierze odwrotne dla macierzy nieosobliwych z zadania 6.

13. Rozwiąż równanie $AX = B^T$, w którym

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1+2i & 0 \\ 1-2i & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2i-1 & 0 & 2i \\ 0 & 3i & 0 & 2i+1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Wyznacz rząd macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & -1 & 6 \\ -3 & 3 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

15. Obliczając wyznacznik odpowiedniej macierzy sprawdź, czy wektory $u = (2+i, i, 2)$, $v = (1-2i, 1, -2i)$, $w = (0, i, 0)$ są liniowo niezależne w $(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}, +, \cdot)$.

16. Wyznaczając rząd odpowiedniej macierzy sprawdź, czy wektory $u = (2+i, i, 2)$, $v = (1-2i, 1, -2i)$, $w = (0, i, 0)$ są liniowo niezależne w $(\mathbb{C}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

17. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1-a & 1 \\ a & 0 & -a \\ -1 & a+a^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

jest: (a) największy; (b) najmniejszy?

Zestaw 6. Układy równań liniowych

1. Znajdź rozwiązania układów równań:

(a) $\begin{cases} 2x+3y-z &= -4 \\ -x-y+z &= 3 \\ 5x+6y+3z &= 8 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 2x+y-z &= 1 \\ x-y+2z &= -1 \\ 4x+5y-7z &= 5 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} 3x-5y+2z+4t &= 2 \\ 7x-4y+z+3t &= 5 \\ 5x+7y-4z-6t &= 3 \end{cases}$.

2. Określ liczbę rozwiązań układu w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$; wyznacz rozwiązania dla tych wartości parametru, dla których układ jest nieoznaczony:

(a) $\begin{cases} (5-p)\,x-2y-z &= 1 \\ -2x+(2-p)\,y-2z &= 2 \\ -x-2y+(5-p)\,z &= 1 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} px+y &= 2 \\ 2x-y &= p \\ 2x-y &= 1 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x+y+pz &= 2 \\ x+py+z &= -1 \\ px+y+z &= -1 \end{cases}$.

3. Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ w przestrzeni wektorowej $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$ zachodzi:

$$(3, p-4, p-5, p-6) \in \operatorname{lin}\{(-p,1,p,p), (-p,p,2,p), (-p,p,p,3)\}\,?$$

Zapisz odpowiedni układ równań, określ rząd macierzy uzupełnionej tego układu w zależności od parametru p oraz wyznacz te jego wartości, dla których rozważany układ jest niesprzeczny.

4. Znajdź dowolną bazę podprzestrzeni wektorowej przestrzeni $(\mathbb{C}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}.$$

W wybranej bazie podaj współrzędne tych z poniższych wektorów, które należą do tej podprzestrzeni:

$$u = (-2i, i, -2i)\,, \qquad v = (-2i, 4i, -2i)\,, \qquad w = (2-i, -4+2i, 2-i).$$

5. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x+(1-a)y-iz &= 0 \\ (1-i)x+(3+i)y-(1+i)z &= 0 \\ ax+y-2z &= 0 \end{cases}$$

dla wartości parametru $a \in \mathbb{C}$ będących pierwiastkami wielomianu

$$\varphi(a) = (1+i)a^2 - (4-4i)a - 4 - 4i.$$

Wyznacz te rozwiązania.

6. Rozważmy następujący problem interpolacyjny: szukamy wielomianu $p \in \mathbb{R}[x]_3$ spełniającego warunki $p(-2) = 3$, $p(-1) = 2$, $p(1) = 6$. Zapisz te warunki w postaci układu równań liniowych ze względu na nieznane współczynniki wielomianu p. Stosując metodę sprowadzania macierzy uzupełnionej układu do postaci schodkowej, zbadaj ile rozwiązań ma ten układ; jeżeli nie jest układem sprzecznym wyznacz jego rozwiązania.

7. Punkt $x_0 \in X$ nazywam punktem stałym odwzorowania $f : X \to X$ jeżeli $f(x_0) = x_0$. Zbadaj liczbę puntów stałych odwzorowania

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \to (2x+(a-1)\,y+2z+1, x-y, 2x+2y+(a+1)\,z-2) \in \mathbb{R}^3$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Zestaw 7. Przekształcenia liniowe

1. Sprawdź, które z podanych odwzorowań jest liniowe:
   (a) $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{L}(x,y,z) = (x-1, y+z)$;
   (b) $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad \mathcal{L}(x,y,z) = (x+y, 2x-z, 3x+y, 0)$;
   (c) $\mathcal{L}\colon M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to M_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{L}(A) = A + A^T$;
   (d) $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_2, \quad (\mathcal{L}p)(x) = xp''(x) + p(0)$;
   (e) $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad (\mathcal{L}p)(x) = p(x)p'(x)$.

2. Dla odwzorowań liniowych z poprzedniego zadania wyznacz bazę jądra $\ker \mathcal{L}$ i bazę obrazu $\operatorname{im} \mathcal{L}$ oraz określ, które z nich jest monomorfizmem, epimorfizmem, izomorfizmem.

3. Odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określone jest przez warunki
$$f(1,1,1) = (0,1), \quad f(1,-1,1) = (2,0), \quad f(-1,1,1) = (3,-1).$$
   (a) Znajdź $\ker f$ oraz $\operatorname{im} f$.
   (b) Podaj rząd odwzorowania f.
   (c) Zbadaj, czy odwzorowanie f jest monomorfizmem.

4. Wyznacz macierze odwzorowań liniowych z zadania 1. w dowolnie wybranych bazach.

5. Niech $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym postaci
$$f(x,y,z,t) = (3x - 2y + z + at, 5x - 8y + 9z + 3t, 2x + y + az - t).$$
   Wyznacz macierz tego odwzorowania w bazach kanonicznych i na jej podstawie określ dla jakich wartości parametru a odwzorowanie f jest: (a) monomorfizmem, (b) epimorfizmem.

6. Rozważmy odwzorowanie liniowe $L\colon \mathbb{R}[x]_4 \to \mathbb{R}[x]_4$,
$$(Lw)(x) = xw'(x) + pw(-x).$$
   Wyznacz jego macierz w bazach kanonicznych i na jej podstawie określ, dla jakich wartości parametru p odwzorowanie L jest: (a) monomorfizmem, (b) epimorfizmem.

7. Dane jest odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \to (2y, x+z) \in \mathbb{R}^2$. Znajdź macierz $M_f(B_1, B_2)$ tego przekształcenia w bazach B_1, B_2:
   (a) $B_1 = (\,(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\,), \quad B_2 = (\,(1,0),(0,1)\,)$;
   (b) $B_1 = (\,(2,1,0),(1,1,1),(0,0,1)\,), \quad B_2 = (\,(1,1),(0,-1)\,)$.

8. Rozważmy odwzorowanie liniowe $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ o macierzy $M_g(B_1,B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Znajdź wartość $g(1,2,0)$, jeżeli w przestrzeniach $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ zadano bazy takie jak w zadaniu poprzednim.

9. Niech $X = \operatorname{lin}\{e^x, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$. Wyznacz macierz endomorfizmu $L : X \to X$ (w dowolnej bazie przestrzeni X), gdzie

   (a) $L(f) = f'$;

   (b) $L(f) = f + f''$.

   Podaj wymiary obrazu i jądra tego odwzorowania (wykorzystując rząd wyznaczonej macierzy odwzorowania) oraz wyznacz ich bazy. Korzystając z macierzowej reprezentacji odwzorowania L wyznacz wartość $L(f)$, gdzie $f(x) = 3\sin x(1 - 4\cos x)$.

10. Rozważmy bazę $B = (v_1, v_2, v_3)$ przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ oraz endomorfizm f, taki że $f(v_1) = v_2 - v_3$, $f(v_2) = v_1 - v_2$, $f(v_3) = v_3 - v_1$.

    (a) Wyznacz macierz $M_f(B)$ i na jej podstawie sprawdź, czy f jest izomorfizmem.

    (b) Wyznacz bazę B jeżeli wiadomo, że macierz przejścia z bazy B do bazy kanonicznej B_k ma postać
    $$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

    (c) Wyznacz wartość $f(0, 1, 2)$ dwoma sposobami: korzystając z macierzy $M_f(B)$ oraz z macierzy $M_f(B_k)$.

11. Znajdź macierz $M_L(B_1, B_2)$ odwzorowania liniowego $L\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_3$ postaci $(L\,w)(x) = xw(-x)$, gdzie $B_1 = (x^2 + x, x - 1, x + 2)$, $B_2 = (x^3 + x, x^3 - x, x^2 + 1, x^2 - 1)$. Ponadto

    (a) wyznacz wymiar przestrzeni $\ker L$ badając rząd macierzy $M_L(B_1, B_2)$,

    (b) wyznacz macierz odwzorowania liniowego L w bazach kanonicznych.

12. ☠ Wyznacz bazę B przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz endomorfizmu $L : (x, y, z) \to (x - y, y + z, -z)$ ma postać
    $$M_L(B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

13. Rozważmy endomorfizm $\Phi_n : \mathbb{R}[x]_n \ni f \to f' \in \mathbb{R}[x]_n$.

    (a) Wyznacz $\ker \Phi_n$, $\operatorname{im} \Phi_n$ oraz bazy tych przestrzeni.

    (b) Wyznacz macierz $M_{\Phi_n}(B)$ odwzorowania Φ_n w bazie $B = (b_0, \ldots, b_n)$, gdzie
    $$b_0(x) = 1, \quad b_1(x) = 1 + x, \quad b_2(x) = 1 + x + x^2, \quad \ldots, \quad b_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n.$$

    (c) Rozważmy bazę $C = (c_0, \ldots, c_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$, gdzie $c_k(x) = x^k$ $(k = 0, \ldots, n)$. Wyznacz macierz przejścia P z bazy B do bazy C oraz macierz P^{-1}.

    (d) Wykorzystując macierzową reprezentację endomorfizmu Φ_3 oblicz $\left(1 + x^2 + 6x^3\right)'$.

14. Rozważmy endomorfizm $F : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ postaci
    $$F : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2a - b + 2c - d & b + 2c - d \\ 2c & b - 2c + 3d \end{bmatrix}.$$

    (a) Wyznacz jądro oraz obraz endomorfizmu F; wyznacz bazy tych przestrzeni.

    (b) W wybranej bazie B przestrzeni $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ wyznacz macierz $M_F(B)$ endomorfizmu F.

    (c) Sprawdź, czy F jest izomorfizmem; w przypadku odpowiedzi pozytywnej wyznacz odwzorowanie odwrotne F^{-1}.

Zestaw 8. Wartości i wektory własne, diagonalizowalność

1. Wyznacz wartości i wektory własne macierzy:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} -i & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -i \end{bmatrix}, \qquad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(d)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Wyznacz wartości własne oraz odpowiadające im podprzestrzenie własne endomorfizmu
   (a) $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (x - y + z, x - y - z, 2x - 2y) \in \mathbb{R}^3$;
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (2x + y + z, 2y + z, 2z) \in \mathbb{R}^3$;
   (c) $f : \mathbb{R}[x]_2 \ni ax^2 + bx + c \to (5a + 9c)x^2 - (3a + 4b + 3c)x + 3a - c \in \mathbb{R}[x]_2$;
   (d) $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3a + c - d & 2a + 2b - 2d \\ 2c & a + d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3. Przypuśćmy, że macierz z zadania 1(d) jest macierzą endomorfizmu $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ w bazie $(1, x, x^2)$. Wyznacz wartości własne endomorfizmu f oraz odpowiadające im podprzestrzenie własne; wskaż bazę B złożoną z jego wektorów własnych oraz wyznacz macierz $M_f(B)$.

4. Rozważmy endomorfizm $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ określony przez warunki: $f(x) = -x$, $f(x^2 + 1) = 2x^2 + 2$, $f(2x + 1) = 0$. Wyznacz jego wartości własne oraz bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$, w której macierz endomorfizmu f jest diagonalna. Wyznacz tę macierz.

5. Sprawdź, czy macierz jest diagonalizowalna; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierze diagonalną D oraz nieosobliwą P, takie że $A = PDP^{-1}$:

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{bmatrix}, \quad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(c) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   Wyznacz te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których wektor v jest wektorem własnym macierzy A. Czy otrzymana macierz jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij.

7. Rozważmy endomorfizm $f : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ określony przez warunki:

$$f(x^3) = -x^3, \quad f(x^2) = x^3 - 1, \quad f(x) = -x, \quad f(1) = 2x^3 + 2x^2 - 3.$$

   Wykaż, że endomorfizm f jest diagonalizowalny. Następnie wyznacz bazę B przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$, w której macierz $M_f(B)$ jest diagonalna. Wypisz tę macierz i korzystając z niej znajdź $f^{10}(x^3 + x)$.

8. Rozważmy przestrzeń wektorową U o bazie $B = (\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x)$ oraz endomorfizm $L : U \to U$ spełniający warunki: $L(\sin x - \cos x) = \cos x - \sin x$, $L(\sin x + \cos x) = \cos x + \sin x$, $L(\sin 2x - \cos 2x) = \cos 2x - \sin 2x$, $L(\cos 2x) = \cos 2x$. Oblicz $L^{1000}(\sin x \cos x)$ oraz $L^{-1}(\sin^2 x - \cos^2 x)$.

Zestaw 9. Elementy geometrii analitycznej w $\mathbb{R}^3$

1. Wyznacz miarę kąta ostrego utworzonego przez wektory $[3, \sqrt{2}, 1]$ oraz $[-1, -\sqrt{2}, 0]$.
2. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których kąt między wektorami $[3, \sqrt{2}, a]$ oraz $[\sqrt{2}, -1, 0]$ ma miarę $\pi/6$.
3. Sprawdź, czy trójkąt o wierzchołkach $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (1, 4, 1)$ jest ostrokątny. Oblicz jego pole oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka A.
4. Sprawdź, czy punkty $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (1, 4, 1)$, $D(2, -3, 1)$ leżą w jednej płaszczyźnie.
5. ☠ Dane są trzy punkty: $A = (1, -1, 2)$, $B = (4, 3, 2)$, $C = (-3, 2, 2)$. Wyznacz taki punkty D, aby czworokąt o wierzchołkach A, B, C, D był kwadratem.
6. Oblicz objętość
   (a) czworościanu o wierzchołkach $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (1, 4, 1)$, $D = (0, 0, 1)$;
   (b) równoległościanu rozpiętego przez wektory $u = (1, 1, 1)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (-2, -1, 3)$.
7. Napisz równanie parametryczne i równanie zwyczajne prostej l,
$$l\colon \begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ 3y + z - 17 = 0 \end{cases}.$$
8. Wyznacz równanie wektorowe i równanie krawędziowe prostej l,
$$l\colon \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = \ \ 5 - t \\ z = \ \ 2 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
9. Wyznacz równanie parametryczne prostej prostopadłej do płaszczyzny $\pi\colon 3x - y + 2z + 3 = 0$ i przecinającej ją w punkcie $(0, 3, 0)$.
10. Wyznacz równanie płaszczyzny π przechodzącej przez początek układu współrzędnych oraz prostopadłej do prostej l,
$$l\colon \begin{cases} x - 2y + z - 20 = 0 \\ -x + y + 3z + 1 = 0 \end{cases}.$$
11. Wyznacz równanie parametryczne i równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (1, 4, 1)$.
12. Wyznacz równanie płaszczyzny zawierającej proste
$$l_1 : x = y = z \qquad \text{oraz} \qquad l_2 : 2x = y = -z.$$
13. Wyznacz równanie płaszczyzny, której punkt $(1, 2, -1)$ jest rzutem prostokątnym punktu $(0, 0, 0)$.

14. Znajdź punkt A symetryczny do punktu przecięcia się prostych l_1 oraz l_2 względem płaszczyzny π, jeżeli

$$l_1: \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{3}; \qquad l_2: \quad \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+2t \\ z = 1-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

oraz $\pi : x+y+z = -2$.

15. Zbadaj wzajemne położenie prostych l i k:

(a) $l\colon \begin{cases} x = \ 1-t \\ y = \ 1+3t \\ z = -3+2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \quad k\colon \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-4t \\ z = 2+t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R};$

(b) $l\colon \begin{cases} x+2y-7=0 \\ 3y+z-17=0 \end{cases}, \qquad k\colon \begin{cases} x = -3+2t \\ y = \ 5-t \\ z = \ 2+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

16. Zbadaj wzajemne położenie prostej k i płaszczyzny π

$$\pi\colon 3x - y + z - 17 = 0\,, \qquad k\colon \begin{cases} x = \ -2t \\ y = 1+t \\ z = 2-3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

17. Zbadaj wzajemne położenie płaszczyzn

$$\pi_1\colon\ -3x + y - z - 3 = 0\,, \qquad \pi_2\colon 6x - 2y + 2z - 5 = 0.$$

18. Oblicz odległość

(a) punktu $P = (0,0,0)$ od prostej $l\colon\ \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{2};$

(b) punktu $P = (0,-1,0)$ od płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $(0,1,2)$, $(1,1,0)$ $(-1,0,1)$;

(c) między płaszczyznami $\pi_1\colon\ -3x+y-z-3=0$ oraz $\pi_2\colon 6x-2y+2z-4=0$.

(d) między prostymi

$$l\colon \begin{cases} x = \ 1-t \\ y = -3-3t \\ z = \ 2-2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{oraz} \quad k\colon \begin{cases} x = \ 2t \\ y = \ 6t \\ z = \ 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R};$$

(e) między prostymi

$$l\colon \begin{cases} x = 1 \\ x+z=0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad k\colon \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases};$$

(f) prostej $k\colon x = -1+t, y = 1-2t, z = 1-t,\ t \in \mathbb{R}$ od płaszczyzny $\pi\colon x+y-z=1$.

19. Dana jest płaszczyzna $\pi\colon x+2y+3z-6=0$ oraz prosta $l\colon x=y=z$. Wyznacz równania parametryczne prostej l oraz prostej będącej jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę π.