Zestaw 1. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych

1. Przedstaw graficznie dziedziny (naturalne) podanych funkcji:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x-2)(y+1)}$, (b) $f(x,y) = \log_{x^2+y^2}(4-x^2-y^2)$, (c) $f(x,y) = \sqrt{\ln\cos(x-y)}$.

2. Jakie powierzchnie w układzie O_{xyz} opisane są poniższymi zależnościami?

   (a) $y = x^2 - 2x + 3$, (b) $x^2 + y^2 = 1$, (c) $2x + y - z + 1 = 0$, (d) $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$,

   (e) $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$, (f) $z = 4x^2 + y^2$, (h) $z = 1 - 3x^2 - 3y^2$, (i) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

3. Dla podanych funkcji wyznacz granice iterowane w punkcie $(x_0, y_0) = (0,0)$:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{|x|-|y|+x^2+y^2}{|x|+|y|}$, (b) $f(x,y) = \dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$, (c) $f(x,y) = x\operatorname{tg}\dfrac{1}{y}$,

   (d) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin^2\dfrac{1}{x}$, (e) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, (f) $f(x,y) = \dfrac{\sin(|x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   Co na podstawie wyznaczonych granic iterowanych możemy powiedzieć o granicy podwójnej?

4. Wyznacz (lub uzasadnij, że nie istnieją) poniższe granice:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy^2}$ (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{|x|+|y|}$ (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} (x^y+y)^{1/y}$

   (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^y$ (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2-1}{(y-2)^2}$

   (k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x\sin y)}{xy}$ (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} \frac{\cos xy}{\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2}$ (m) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x+y+z)}{x^2+y^2+z^2}$

5. Zbadaj ciągłość podanych funkcji:

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|y+x|y|}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{e^{x^2+y^2}-1} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(e) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin|x+y|}{|x|+|y|} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(f) ☠ $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^4+y^2} & \text{dla } x>0\\ x\cos x+y & \text{dla } x\leqslant 0\end{cases}$

6. ☠ Wyznacz, o ile istnieją, te wartości parametrów $a,b\in\mathbb{R}$, dla których podane funkcje są ciągłe:

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\,(x+ay)\,(x+by)}{x^2-y^2} & \text{dla } |x|\neq|y|\\ x^2 & \text{dla } |x|=|y|\end{cases}$

(b) $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2-1} & \text{dla } x^2+y^2\geqslant 1\\ ax+by & \text{dla } x^2+y^2<1\end{cases}$

Zestaw 2. Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

1. Wyznacz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{\sin x + \cos y}{\sin x - \cos y} + x^{y^2+2y}$,

   (b) $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}$,

   (c) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$,

   (d) $f(x,y) = xy\,\mathrm{sgn}\,(xy)$,

   (e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

   (f) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{dla } xy = 0 \\ 1 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases}$.

2. Wyznacz pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach oraz kierunkach:

   (a) $f(x,y) = x^2+y^2$, $(x_0,y_0) = (1,-1)$, $\overrightarrow{v} = (-3,-4)$;
   (b) $f(x,y) = x\ln y + y\ln x$, $(x_0,y_0) = (1,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,0)$;
   (c) $f(x,y) = |x-y|$, $(x_0,y_0) = (1,1)$, $\overrightarrow{v} = (3,4)$;
   (d) $f(x,y) = 2|x| + |y|$, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $\overrightarrow{v} = (1,1)$.

3. Przypuśćmy, że funkcja f posiada pochodną kierunkową $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(p_0)$ w punkcie p_0 w kierunku wektora $\overrightarrow{v} \neq 0$. Uzasadnij, że
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(p_0 + t\overrightarrow{v}) - f(p_0)}{t\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(p_0).$$
   Wykorzystując wykazaną zależność wyznacz ponownie pochodną kierunkową wybranej funkcji z poprzedniego zadania.

4. Zachodzi następujące twierdzenie:

   Twierdzenie Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ma ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w otoczeniu pewnego punktu $p_0 \in \mathbb{R}^n$, to dla dowolnego wersora $\overrightarrow{v}$ mamy
$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(p_0) = \overrightarrow{v} \circ \mathrm{grad}\, f(p_0),$$
   gdzie $\mathrm{grad}\, f(p_0) = \left(f'_{x_1}(p_0), \ldots, f'_{x_n}(p_0)\right)$ to gradient funkcji f w punkcie p_0, a $\circ$ to naturalny iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

   Wykorzystując powyższy fakt, wyznacz ponownie pochodne kierunkowe z zadania 2.

5. (a) Niech $g(x,y) = f(xy, x^2+y^2)$, gdzie funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Wyznacz

$$y\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y).$$

(b) Wykaż, że funkcja $g(x,y) = y + f(x^2+y^2)$ spełnia równanie

$$x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = x;$$

funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ to dowolna funkcja różniczkowalna.

6. Wyznacz macierze Jacobiego oraz różniczki zupełne podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$;

(b) $f(x,y) = x^2y + y^2x$, $(x_0,y_0) = (0,1)$;

(c) $f(x) = (x, x^2+x, 2x-1)$, $x_0 = 1$;

(d) $f(x,y,z) = (xy+yz, x^2+y^2)$, $(x_0,y_0,z_0) = (-1,2,1)$.

7. Zbadaj różniczkowalność podanych funkcji:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

8. Sprawdź, czy poniższe funkcje spełniają warunek $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0)$:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Zestaw 3. Ekstrema lokalne, warunkowe, globalne

1. Wyznacz ekstrema lokalne podanych funkcji:
   (a) $f(x,y) = 3(x-1)^2 + 4(y+2)^2$;
   (b) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;
   (c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
   (d) $f(x,y) = x^3 - y^3 + 1$;
   (e) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$;
   (f) $f(x,y,z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$;
   (g) $f(x,y,z) = 2x^2/y + y^2/z - 4x + 2z^2$.
2. Wyznacz ekstrema warunkowe podanych funkcji przy zadanych warunkach:
   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 2$, $2x^2 + y^2 = 4$;
   (b) $f(x,y) = x + y$, $e^{x+y} - xy - 1 = 0$;
   (c) $f(x,y) = y - \ln x$, $x^2 + (y-2)^2 - 2 = 0$
   (d) $f(x,y) = x + 2y$, $x^2 + y^2 = 5$;
   (e) $f(x,y,z) = x + y + 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
   (f) $f(x,y,z) = xyz$, $x + y + z = 1$;
   (g) $f(x,y,z) = x + y + z$, $xyz = 1$.
3. Wyznacz największą oraz najmniejszą wartość funkcji f w podanym obszarze:
   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $|x| + |y| \leqslant 2$;
   (b) $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ w trójkącie ograniczonym osiami O_x, O_y oraz prostą $x + y = 2\pi$;
   (c) $f(x,y) = xy$, $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$;
   (d) $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2$ w trójkącie domkniętym o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$;
   (e) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.
4. Spośród wszystkich trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu r wybierz ten o największym polu.
5. Oblicz odległość początku układu współrzędnych od:
   (a) płaszczyzny $\pi : x - 2y + 3z - 6 = 0$; (b) powierzchni $\gamma : z = \sqrt{(x+2)(y-1)}$.
6. Wyznacz te wartości parametrów $a \in [-3,3]$, $b \in [-1,1]$ dla których wykres funkcji
   $$f : [-1,1] \ni x \to 5x^3 - ax - b \in \mathbb{R}$$
   obrócony wokół osi Ox ogranicza bryłę o najmniejszej objętości.

Zestaw 4. Całki wielokrotne

1. Oblicz poniższe całki po podanych zbiorach:

   (a) $\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}, \quad R=[0,2]\times[0,1]\,;$

   (b) $\iint\limits_R x+y-2dxdy,\ R=[1,e]\times[1,2];$

   (c) $\iint\limits_R e^{x-y}dxdy,\ R$ – trójkąt o wierzchołkach $(1,0)\,,(3,1)\,,(2,2)\,;$

   (d) $\iint\limits_R x\sin y+y\sin x dxdy,\ R$ – trójkąt o wierzchołkach $(0,0)\,,(0,\pi)\,,(\pi,2\pi)\,;$

   (e) $\iiint\limits_R \frac{dxdydz}{\sqrt{x+y+z+1}},\ R=[0,1]\times[0,2]\times[0,3]\,;$

   (f) $\iiint\limits_R z^2dxdydz,\ R$ – czworościan o wierzchołkach $(0,0,0)\,,(0,0,1)\,,(0,1,0)\,,(1,0,0)$.

2. W podanych całkach zamień kolejność całkowania:

   (a) $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{|x|} f(x,y)\,dydx;$ (b) $\int\limits_{0}^{4}\int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dydx;$ (c) $\int\limits_{1}^{2}\int\limits_{0}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dxdy.$

3. Oblicz podane całki – zastosuj współrzędne biegunowe:

   (a) $\iint\limits_D xydxdy,\ D=\{(x,y): x\geqslant 0, 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}\,;$

   (b) $\iint\limits_D x^2+y^2dxdy,\ D=\{(x,y): y\geqslant 0, y\leqslant x^2+y^2\leqslant x\}\,.$

   (c) $\iint\limits_D 1dxdy,\ D=\left\{(x,y): x^2+y^2+4z\leqslant 0,\ z\geqslant 1-\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$

4. Wykorzystując całkę podwójną oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

   (a) $y^2 = 4x$, $x + y = 3$; (b) $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

5. Wykorzystując całkę podwójną oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

   (a) $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$;
   (b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$.

6. Całkę potrójną $\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dxdydz$ zamień na całkę iterowaną; U to obszar ograniczony przez powierzchnie:

   (a) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 6$;
   (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z = 4$ $(z \geqslant 4)$;
   (c) $z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$.

7. Oblicz podane całki – zastosuj współrzędne walcowe lub sferyczne:

   (a) $\iiint\limits_U (x^2 + y^2 + z^2)^2\, dxdydz, \quad U = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqslant 4, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1\}$;
   (b) $\iiint\limits_U xyzdxdydz, \quad U = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$;
   (c) $\iiint\limits_U x^2 + y^2 dxdydz, \quad U = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4z\}$;
   (d) $\iiint\limits_U \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad U = \{(x, y, z) : 4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9\}$;
   (e) $\iiint\limits_U x^2 dxdydz, \quad U = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4x\}$.

8. (a) Oblicz masę półkuli wydrążonej o promieniu wewnętrznym r i promieniu zewnętrznym $R \geqslant r$, jeżeli gęstość masy w punkcie jest równa odległości tego punktu od środka kuli.
   (b) Oblicz masę kuli o promieniu R, której gęstość masy w każdym punkcie jest równa kwadratowi odległości tego punktu od ustalonej średnicy.
   (c) Oblicz masę bryły ograniczonej powierzchniami $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (dla $z \geqslant 0$), jeżeli jej objętościowa gęstość masy wyraża się wzorem $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   (d) Oblicz pole płata powierzchniowego wyciętego walcem $x^2 + y^2 = a^2$ ze sfery $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $0 < a < r$.
   (e) Oblicz pole płata wyciętego z powierzchni $z = 1 - x^2 - y^2$ przez walec $x^2 + y^2 = 1$.

Zestaw 5. Szeregi liczbowe, szeregi potęgowe

1. Dla podanych szeregów wyznacz ich sumy częściowe S_N:

   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

2. Zbadaj zbieżność podanych szeregów liczbowych:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n^2}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$,

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$, (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{2^{n/2}(n!)^2}$, (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{4^n n!}$,

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, (k) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2-1}$, (l) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\ln(1+n)$, (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n\frac{1}{n^2}$,

   (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\sqrt{(2n)^n}}$, (o) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n}$, (p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}e^{1/n}$.

3. Wyznacz zbiory zbieżności podanych szeregów funkcyjnych:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-3x)^n}{3^n+2^n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}(x+1)^n$, (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(x+2)^n$, (d) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\frac{x^n}{n\ln^2 n}$,

   (e) ☠ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-3)^n}{n}$, (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}x^{2n}}{n4^n}$, (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x|x|+3)^n}{2^n\sqrt{n}}$.

4. Uzasadnij poniższe równości:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, dla $|x|<1$; następnie wyznacz wartość sumy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, dla $|x|<1$;

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = \operatorname{arctg} x$, dla $|x|<1$; następnie wyznacz wartość sumy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

5. Znajdź wartości podanych szeregów liczbowych:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}$; (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)\,2^n}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\,e^n}$.

6. Funkcję f przedstaw jako sumę szeregu potęgowego o środku w punkcie x_0, oblicz promień zbieżności otrzymanego szeregu oraz wyznacz wartość $f^{(100)}(x_0)$:

(a) $f(x) = \frac{1}{2+3x}, \quad x_0 = 0;$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}, \quad x_0 = -1;$

(c) $f(x) = \sin^2 x, \quad x_0 = 0;$

(d) $f(x) = \sinh^2 x, \quad x_0 = 0;$

(e) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x} \quad x_0 = -1;$

(f) $f(x) = \ln\left(x^2+2x+3\right), \quad x_0 = 0.$

Zestaw 6. Ciągi i szeregi funkcyjne

1. Zbadaj zbieżność punktową oraz jednostajną[1] ciągów funkcyjnych $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}, \quad x \geqslant 0;$

   (b) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^\alpha x^2}, \quad x \in [0,1], \quad \alpha \in \{2,4\};$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{2}{1+x^n}, \quad x \geqslant 0;$

   (d) $f_n(x) = \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^{-x}+n^x}, \quad x \in \mathbb{R};$

   (e) $f_n(x) = x^2 + \dfrac{1}{x+n}, \quad x \geqslant 0;$

   (f) $f_n(x) = n^2 x e^{-n^2x^2}, \quad x \in [0,1];$

   (h) ☠ $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}, \quad x \in [0,1];$

   (i) ☠ $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

2. Zbadaj zbieżność punktową, bezwzględną oraz jednostajną[1] podanych szeregów funkcyjnych:

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{kx}{1+k^6x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$

   (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} \sin \dfrac{x}{k}, \quad x \in [-1,1];$

   (c) ☠ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1,1);$

   (d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^k \ln^k x}{k!}, \quad x \in (0,1];$

   (e) ☠ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{x^2+k}, \quad x \in \mathbb{R};$

   (f) ☠ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^k}, \quad x \in \mathbb{R}.$

[1] W zadaniach oznaczonych symbolem ☠ pojawiają się pewne trudności jedynie przy badaniu zbieżności jednostajnej.

Zestaw 7. Szeregi Fouriera

1. Wyznacz szeregi Fouriera podanych funkcji:

   (a) $f(x) = x + 1, \quad x \in [-2, 2]$; (b) $f(x) = |x| + 1, \quad x \in [-2, 2]$;

   (c) $f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$; (d) $f(x) = |\sin x|, \quad x \in [-\pi, \pi]$;

   (e) $f(x) = |x + 2|, \quad x \in [-3, 1]$; (f) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla } -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$.

   Wskaż punkty, w których szeregi te są zbieżne do funkcji f.

2. Dla funkcji $f(x) = \operatorname{sgn}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ określonej na przedziale $[-\pi, \pi]$ znajdź jej szereg Fouriera; do jakiej funkcji ten szereg jest zbieżny punktowo?

3. Podane funkcje rozwiń w szereg sinusów:

   (a) $f(x) = 1 - |x - 1|, \quad x \in [0, 2]$; (b) $f(x) = e^x - 1, \quad x \in (0, \pi)$;

   (c) $f(x) = \cos x, \quad x \in (0, \pi)$; (d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{dla } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \end{cases}$

4. Podane funkcje rozwiń w szereg cosinusów:

   (a) $f(x) = 1 - |x - 1|, \quad x \in [0, 2]$; (b) $f(x) = \cos^2 x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

   (c) $f(x) = \sin x, \quad x \in (0, \pi)$; (d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{dla } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \end{cases}$.

5. Wykaż, że dla $x \in (0, \pi)$ zachodzi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2).$$

6. Dla wybranych funkcji z powyższych zadań zapisz tożsamość Parsevalla.

Karta wzorów

Trygonometria

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin x \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}$$

Całka nieoznaczona

$$\int \frac{1}{x^2+k^2}dx = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k} + c, \quad \int \frac{1}{x^2-k^2}dx = \frac{1}{2k}\ln\left|\frac{x-k}{x+k}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2+k}| + c, \quad \int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{k} + c$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx$$

Całki wielokrotne

Współrzędne biegunowe, walcowe, sferyczne:

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ r \geqslant 0,\ \alpha \in [0,2\pi) \\ J = r \end{cases}, \quad \begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ z = z \\ r \geqslant 0,\ \alpha \in [0,2\pi),\ z \in \mathbb{R} \\ J = r \end{cases}, \quad \begin{cases} x = r\cos\alpha\ \cos\beta \\ y = r\cos\alpha\ \sin\beta \\ z = r\sin\alpha \\ r \geqslant 0,\ \alpha \in [-\pi/2,\pi/2],\ \beta \in [0,2\pi) \\ J = r^2\cos\alpha \end{cases}$$

Pole figury płaskiej P, objętość bryły Ω, masa bryły Ω o gęstości ρ:

$$|P| = \iint_P 1dxdy, \quad |\Omega| = \iiint_\Omega 1dxdydz, \quad m = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)dxdydz$$

Pole płata powierzchniowego $z = f(x,y)$ dla $(x,y) \in D$:

$$|S| = \iint_D \sqrt{1+(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2}dxdy$$

Szeregi funkcyjne

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ x \in \mathbb{R}; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\ x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\ x \in (-1,1]; \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\ x \in (-1,1),\ \alpha \in \mathbb{R};$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right); \quad \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2);$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,\ n = 0,1,2,\ldots \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,\ n = 1,2,3,\ldots$$