Metody numeryczne równań różniczkowych zwyczajnych

Materiał ćwiczeniowy dla studentów kierunku Matematyka

Michał Góra
Wydział Matematyki Stosowanej AGH

Kraków 2022

Zestaw 1. Istnienie i jedyność rozwiązania

Zadanie 1. Sprawdź, czy podane funkcje spełniają warunek Lipschitza:

(a) $f : [0, 1] \ni x \to x^p \in \mathbb{R}$, gdzie $p > 0$;

(b) $f : \mathbb{R} \ni x \to \sum_{i=1}^{n} a_i |x - x_i| \in \mathbb{R}$;

(c) $f : [0, 1] \times [0, 1] \ni (x, y) \to xy^2 + x^2y \in \mathbb{R}$;

(d) $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to (2x - 3y + 1, -x + 4y - 2) \in \mathbb{R}^2$;

(e) $f : \mathbb{R}^n \ni x \to Ax + b \in \mathbb{R}^m$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Zadanie 2. Czy a) suma, b) iloczyn, c) złożenie funkcji spełniających warunek Lipschitza jest również funkcją spełniającą warunek Lipschitza?

Zadanie 3. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Wykaż, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $L > 0$, taka że

$$\sup_{x\in(a,b)} |f'(x)| \leqslant L.$$

Zadanie 4. Podane równanie zapisz w postaci $z' = f(z)$:

(a) $x' = t^2 + x^2$;

(b) $x'' + 2t^2x' + (\sin t)\, x = t^2 + 1$;

(c) $x' = 2y + tx$, $y' = x + t$;

(d) $x(t) = \int_0^t x(s)\, ds + t + 1$.

Jaką postać, dla uzyskanego równania z punktów (a)–(c), przyjmą warunki początkowe wyjściowego równania?

Zadanie 5. [komp.] Wyznacz przedział na którym poniższy problem początkowy ma rozwiązanie:

(a) $x' = 2te^{-x}, \quad x(0) = 0$;

(b) $x' = 2x^2 - t, \quad x(1) = 1$;

(c) $x' = t + e^x, \quad x(1) = 0$;

(d) $x'' = t + e^x, \quad x(1) = 0,\ x'(1) = 1$;

(e) $x' = 1/\cos x, \quad x(0) = 0$.

Zadanie 6. Wykaż, że jeżeli funkcja $f : \mathbb{R}^{n+1} \ni (t, x) \to f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ jest ciągła i ograniczona dla $(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$, to zagadnienie początkowe $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(a) = x_a$ ma rozwiązanie na przedziale $[a, b]$.

Zestaw 2. Rząd oraz zgodność schematu jednokrokowego

Zadanie 1. Zbadaj rząd oraz oszacuj błąd lokalny schematu jednokrokowego (ozn. $f_k = f(t_k, x_k)$):

(a) jawnego schematu Eulera: $x_{k+1} = x_k + hf_k$;

(b) niejawnego schematu Eulera: $x_{k+1} = x_k + hf_{k+1}$;

(c) zmodyfikowanego schematu Eulera: $x_{k+1} = x_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{1}{2}hf_k\right)$;

(d) schematu Heuna: $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}(f_k + f(t_{k+1}, x_k + hf_k))$;

(e) schematu Taylora: $x_{k+1} = x_k + hf_k + \frac{h^2}{2}(f_{t,k} + f_{x,k} f_k)$,
gdzie $f_{t,k} = f'_t(t_k, x_k)$ oraz $f_{x,k} = f'_x(t_k, x_k)$.

Zadanie 2. Wyznacz rząd schematu $x_{k+1} = x_k + h(\alpha f_k + \beta f_{k+1})$ jako funkcję parametrów $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Pokaż, że numeryczne rozwiązanie zagadnienia

$$x' = x^{1/3}, \quad x(0) = 0$$

znalezione jawnym schematem Eulera nie przybliża funkcji $x(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$ będącej rozwiązaniem tego zagadnienia. Wyjaśnij zaistniałą sytuację.

Zadanie 4. Udowodnij, że zmodyfikowany schemat Eulera

$$x_{k+1} = x_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{1}{2}hf_k\right)$$

daje dokładne rozwiązanie (tj. $e_k = 0$, dla $k \in \mathbb{N}$) zagadnienia początkowego

$$x' = -2at, \; x(t_0) = x_0.$$

Zadanie 5. [komp.] Schematy z zadania 1 zastosuj do konstrukcji rozwiązania przybliżonego podanego zagadnienia początkowego na zadanym przedziale. Metodą połowienia kroku całkowego, wyznaczając błędy lokalne oraz błędy globalne, zbadaj eksperymentalnie rzędy tych schematów. Czy uzyskane wyniki eksperymentalne zgodne są z wynikami teoretycznymi?

(a) $x' = \frac{2(x+1)}{t+1}$, $x(0) = 1$ na przedziale $[0, 10]$;

(b) $x' = x - (1+t)^{-2} - (1+t)^{-1}$, $x(0) = 2$ na przedziale $[0,1]$.

Zadanie 6. [komp.] Wykorzystując dowolnie wybrany zbieżny schemat jednokrokowy, stablicuj w przedziale $[0,5]$ (z krokiem $h = \frac{1}{20}$) wartości dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego

$$F(x) = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Porównaj wyniki, przedstawiając na wspólnym wykresie uzyskane rozwiązania numeryczne oraz funkcję $x \to$`CDF[NormalDistribution[],`x`]`.

Zadanie 7. Zbadaj zgodność: a) jawnego i niejawnego schematu Eulera; b) schematu Heuna.

Zadanie 8. Rozważmy jawny schemat jednokrokowy $x_{k+1} = x_k + h\Phi_f(h, t_k, x_k)$. Wykaż, że jeżeli schemat ten jest zgodny oraz funkcja $\frac{\partial \Phi_f}{\partial h}$ jest ciągła, to rząd tego schematu jest nie mniejszy niż jeden. Jakie założenie dotyczące funkcji Φ_f należy dołożyć, aby otrzymać podobny wynik dla schematów niejawnych?

Zadanie 9. Wykaż, że dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$ istnieje jednokrokowy schemat rzędu p, który nie jest zgodny.

Zadanie 10.* Czy istnieje jednokrokowy zgodny schemat zerowego rzędu?

Zestaw 3. Schematy Rungego–Kutty

Zadanie 1. Dany jest schemat dwupoziomowy typu Rungego–Kutty

$$x_{k+1} = x_k + h(b_1 K_1 + b_2 K_2),$$

w którym

$$K_1 = f(t_k + c_1 h, x_k), \qquad K_2 = f(t_k + c_2 h, x_k + ahK_1).$$

Jakie warunki muszą spełniać stałe a, b_1, b_2, c_1, c_2, aby schemat ten był rzędu 2?

Zadanie 2. Zbadaj zgodność schematu Rungego–Kutty

$$x_{k+1} = x_k + h\sum_{i=1}^{r} b_i K_i(h, t_k, x_k),$$
$$K_i(h,t,x) = f\left(t + c_i h, x + h\sum_{j=1}^{r} a_{ij} K_j(h,t,x)\right)$$

zakładając, że

(a) $a_{ij} = 0$ dla $i \leqslant j$ (tj. jest to schemat otwarty);

(b) $a_{ij} = 0$ dla $i < j$.

Zadanie 3. Udowodnij, że schemat Rungego–Kutty postaci

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right), \tag{3.1}$$

gdzie

$$\begin{array}{ll} K_1 = f\left(t_k, x_k\right), & K_2 = f\left(t_k + \tfrac{1}{2}h, x_k + \tfrac{1}{2}hK_1\right), \\ K_3 = f\left(t_k + \tfrac{1}{2}h, x_k + \tfrac{1}{2}hK_2\right), & K_4 = f\left(t_k + h, x_k + hK_3\right) \end{array}$$

daje dokładne rozwiązanie (tj. $e_k = 0$, dla $k \in \mathbb{N}$) zagadnienia początkowego

$$x'(t) = \varphi(t), \quad x(t_0) = x_0$$

dla dowolnego wielomianu $\varphi \in \pi_3$.

Zadanie 4. [komp.]

(a) Przypuśćmy, że funkcja f nie zależy od x; uzasadnij, że schemat (3.1) jest rzędu 4.

(b) Zastosuj schemat (3.1) do znalezienia przybliżenia rozwiązania zagadnienia początkowego

$$x' = t\ln(t+1), \qquad x(0) = 1$$

na przedziale $[0, 10]$. Stosując metodę połowienia kroku, wyznacz eksperymentalnie rząd schematu.

Zadanie 5. Jedna z metod konstrukcji schematów jednokrokowych opiera się na następującym pomyśle: rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$x' = f(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

spełnia następujące równanie całkowe

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s)\,ds. \tag{3.2}$$

Zastępując całkę występującą w powyższym wyrażeniu jej przybliżeniem wynikającym z zastosowania kwadratury Simpsona

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx Q(f, a, b) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right),$$

zależność (3.2) prowadzi do następującego schematu jednokrokowego

$$x_{k+1} = x_k + Q(f, t_k, t_{k+1}).$$

Wykaż, że schemat ten generuje ciąg przybliżeń $\{x_k\}$ identyczny z ciągiem wynikającym z zastosowania schematu (3.1).

Zestaw 4. Absolutna stabilność schematów jednokrokowych

Zadanie 1. Wyznacz obszary absolutnej stabilności podanych schematów jednokrokowych:

(a) otwartego i zamkniętego schematu Eulera;

(b) schematu trapezów;

(c) schematu Taylora $x_{k+1} = x_k + hf_k + \frac{h^2}{2}\left(f_{t,k} + f_{x,k}f_k\right)$,
gdzie $f_{t,k} = f'_t\left(t_k, x_k\right)$, $f_{x,k} = f'_x\left(t_k, x_k\right)$;

(d) zmodyfikowanego schematu Eulera: $x_{k+1} = x_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{1}{2}hf_k\right)$;

(e) schematu Heuna: $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\left(f_k + f\left(t_{k+1}, x_k + hf_k\right)\right)$;

(f) schematu Rungego–Kutty: $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right)$, gdzie

$$\begin{array}{ll} K_1 = f\left(t_k, x_k\right), & K_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}K_1\right), \\ K_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}K_2\right), & K_4 = f\left(t_k + h, x_k + hK_3\right); \end{array}$$

(g) schematu Rungego–Kutty: $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{8}\left(K_1 + 3K_2 + 3K_3 + K_4\right)$, gdzie

$$\begin{array}{ll} K_1 = f\left(t_k, x_k\right), & K_2 = f\left(t_k + \frac{h}{3}, x_k + \frac{h}{3}K_1\right), \\ K_3 = f\left(t_k + \frac{2h}{3}, x_k - \frac{h}{3}K_1 + hK_2\right), & K_4 = f\left(t_k + h, x_k + hK_1 - hK_2 + hK_3\right). \end{array}$$

Zadanie 2. [komp.] Rozważmy układ liniowy:

(a) $\begin{cases} x'_1 = -2x_1 + x_2 \\ x'_2 = -2x_1 - 4x_2 \end{cases}$ z warunkiem początkowym $\left(x_1(0), x_2(0)\right) = (1, 2)$;

(b) $\begin{cases} x'_1 = -2x_1 + x_2 \\ x'_2 = x_1 - 4x_2 \end{cases}$ z warunkiem początkowym $\left(x_1(0), x_2(0)\right) = (1, 2)$.

Z jakim krokiem można całkować ten układ stosując schemat Heuna, aby uzyskane rozwiązanie przybliżone zbiegało do zera (wraz z $k \to \infty$)? Przeprowadź obliczenia z krokiem całkowym należącym oraz nienależącym do obszaru absolutnej stabilności tego schematu. Porównaj wyniki tego eksperymentu szkicując wyznaczone rozwiązania przybliżone oraz rozwiązanie dokładne.

Zadanie 3.* Udowodnij, że jeżeli $r \leqslant 4$, to obszar stabilności absolutnej dla $r-$poziomowych otwartych schematów Rungego–Kutty rzędu r, zależą jedynie od r, tj. są takie same dla schematów o takiej samej liczbie poziomów.

Zadanie 4. Wykaż, że schemat Rungego–Kutty

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\left(K_1 + K_2\right),$$

gdzie $K_1 = f\left(t_k, x_k\right)$ oraz $K_2 = f\left(t_k + h, x_k + \frac{h}{2}\left(K_1 + K_2\right)\right)$ jest A–stabilny.

Zadanie 5. Uzasadnij, że otwarte schematy Rungego–Kutty mają ograniczone obszary absolutnej stabilności.

Zestaw 5. Rząd liniowych schematów wielokrokowych

Zadanie 1. Rozważmy liniowy schemat $q-$krokowy

$$\sum_{j=0}^{q} \alpha_j x_{k+j} = h \sum_{j=0}^{q} \beta_j f_{k+j}. \tag{5.1}$$

Uzasadnij, że schemat ten jest rzędu p wtedy i tylko wtedy, gdy

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_p = 0 \neq c_{p+1},$$

gdzie

$$c_0 = \sum_{j=0}^{q} \alpha_j, \quad c_k = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{q} j^k \alpha_j - \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=0}^{q} j^{k-1} \beta_j, \text{ dla } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Zadanie 2. Zbadaj rząd:

(a) schematu punktu środkowego: $x_{k+2} = x_k + 2hf_{k+1}$;

(b) schematu $x_{k+2} - x_{k+1} = \frac{1}{3}h\left(3f_{k+1} - 2f_k\right)$;

(c) schematu Milne'a–Simpsona: $x_{k+2} - x_k = \frac{1}{3}h\left(f_{k+2} + 4f_{k+1} + f_k\right)$.

Zadanie 3. Udowodnij, że rząd liniowego schematu $q-$krokowego postaci (5.1) jest równy p wtedy i tylko wtedy, gdy jego lokalny błąd

$$r_k\left(x, t_k, h\right) = \sum_{j=0}^{q} \left[\alpha_j x\left(t_k + hj\right) - h\beta_j x'\left(t_k + hj\right)\right]$$

jest równy zero dla każdego $x \in \pi_p$ oraz $r_k\left(x, t_k, h\right) \neq 0$ dla pewnego $x \in \pi_{p+1}$.

Zadanie 4. Wyznacz takie stałe α i β, aby schemat

$$x_{k+3} - x_k + \alpha\left(x_{k+2} - x_{k+1}\right) = h\beta\left(f_{k+1} + f_{k+2}\right)$$

był rzędu czwartego.

Zadanie 5. Rozważmy dwa liniowe q–krokowe schematy postaci

$$\sum_{i=0}^{q} A_i x_{k+i} = h \sum_{i=0}^{q} B_i f_{k+i} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{i=0}^{q} a_i x_{k+i} = h \sum_{i=0}^{q} b_i f_{k+i},$$

o rzędach równych odpowiednio P oraz p. Przy ich pomocy konstruujemy schemat $S_{\alpha,\beta}$

$$\sum_{i=0}^{q} (\alpha A_i + \beta a_i)\, x_{k+i} = h \sum_{i=0}^{k} (\alpha B_i + \beta b_i)\, f_{k+i}$$

zależny od parametrów $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Co możemy powiedzieć o rzędzie schematu $S_{\alpha,\beta}$? Czy, dla pewnych wartości parametrów, może on być większy niż $\max\{p, P\}$? Odpowiedź pozytywną uzasadnij podając przykład.

Zadanie 6. [komp.] Stosując schemat

$$x_{k+2} - x_{k+1} = \frac{1}{3} h \left(3 f_{k+1} - 2 f_k\right),$$

znajdź rozwiązanie problemu początkowego $x'(t) = tx(x-1)$, $x(0) = 1/2$ na przedziale $[0,1]$. Przeprowadź obliczenia z krokiem $h_p = 2^{-p}/10$, $p = 0,1,2,3$. Uzyskane wyniki przedstaw na wspólnym wykresie. Co, na podstawie wyników numerycznych, można powiedzieć o rzędzie zastosowanego schematu?

Zestaw 6. Zbieżność schematów wielokrokowych

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność schematu

$$x_{k+2} + (\alpha - 1)\, x_{k+1} - \alpha x_k = \frac{1}{4} h \left((\alpha + 3)\, f_{k+2} + (3\alpha + 1)\, f_k\right)$$

w zależności od wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Rozważmy rodzinę otwartych schematów 2−krokowych

$$x_{k+2} + \alpha_1 x_{k+1} + \alpha_0 x_k = h \left(\beta_0 f_k + \beta_1 f_{k+1}\right).$$

Wyznacz wartości α_0, β_0 oraz β_1 w zależności od α_1, tak aby otrzymać schemat możliwie wysokiego rzędu. Zbadaj stabilność otrzymanego w ten sposób schematu w zależności od wartości parametru α_1.

Zadanie 3. Rozważmy tzw. przekształcenie Möbiusa $\mathcal{M} : u \to \frac{u+1}{u-1}$. Wykaż, że

$$|u| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\mathcal{M}\left(u\right)\right) < 0 \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{Re}\left(u\right) < 0 \Leftrightarrow \left|\mathcal{M}\left(u\right)\right| < 1.$$

Następnie uzasadnij, że wielomian $P \in \pi_n$ jest stabilny w sensie Schura wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $Q \in \pi_n$,

$$Q(s) = P\left(\frac{s+1}{s-1}\right)(s-1)^n,$$

jest stabilny w sensie Hurwitza.

Zadanie 4. Uzasadnij, że rzeczywisty wielomian stopnia drugiego jest stabilny w sensie Hurwitza wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego współczynniki są tego samego znaku. Następnie, wykorzystując poprzednie zadanie, scharakteryzuj rzeczywiste wielomiany stopnia drugiego stabilne w sensie Schura.

Zadanie 5. Wyznacz przedział absolutnej stabilności schematu

$$x_{k+2} - x_{k+1} = \frac{h}{2}\left(3f_{k+1} - f_k\right).$$

Zadanie 6. Wyznacz przedziały absolutnej stabilności podanych schematów w zależności od parametru α leżącego w podanym obszarze jego zmienności:

(a) $x_{k+2} - \left(1+\alpha\right)x_{k+1} + \alpha x_k = \frac{h}{2}\left(\left(3-\alpha\right)f_{k+1} - \left(1+\alpha\right)f_k\right), \quad \alpha \in [-1, 1);$

(b) $x_{k+3} + \alpha\left(x_{k+2} - x_{k+1}\right) - x_k = \frac{h}{2}\left(3+\alpha\right)\left(f_{k+2} + f_{k+1}\right), \quad \alpha \in (-3, 1).$

Zadanie 7. Wyznacz, jeżeli istnieją, te wartości parametru α dla których schemat

$$x_{k+2} + \alpha x_{k+1} - \left(1+\alpha\right)x_k = \frac{h}{2}\left(-\alpha f_{k+2} + \left(4+3\alpha\right)f_{k+1}\right)$$

jest jednocześnie zbieżny, $A-$stabilny i rzędu drugiego.

Zadanie 8. Rozważmy liniowy schemat $q-$krokowy

$$\sum_{j=0}^{q} \alpha_j x_{k+j} = h\sum_{j=0}^{q} \beta_j f_{k+j},$$

którego współczynniki $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$ spełniają warunek

$$\alpha_j = -\alpha_{q-j}, \quad \beta_j = \beta_{q-j} \qquad \left(j = 0, 1, \ldots, q\right);$$

schematy takie nazywamy *schematami symetrycznymi*. Udowodnij, że wyrażenie

$$\frac{\rho\left(e^{i\alpha}\right)}{\sigma\left(e^{i\alpha}\right)},$$

gdzie ρ oraz σ to wielomiany charakterystyczne schematu, jest dla wszystkich wartości $\alpha \in [0, 2\pi)$ czysto urojone. Co na tej podstawie można powiedzieć o obszarze absolutnej stabilności schematów symetrycznych?

Zadanie 9. Udowodnij, że wielomiany charakterystyczne ρ oraz σ liniowego schematu q–krokowego symetrycznego spełniają równania: $\rho(s) = -s^q \rho(1/s)$ oraz $\sigma(s) = s^q \sigma(1/s)$.

Zadanie 10. Uzasadnij, że wszystkie niezerowe pierwiastki wielomianu charakterystycznego ρ odpowiadającego zbieżnemu schematowi symetrycznemu leżą na okręgu jednostkowym.

Zadanie 11. Przypuśćmy, że wielomiany charakterystyczne ρ oraz σ pewnego schematu S mają wspólny dzielnik $\varphi \in \pi_n$, tj. $\rho(s) = \rho^*(s)\varphi(s)$ oraz $\sigma(s) = \sigma^*(s)\varphi(s)$. Wielomiany ρ^* oraz σ^* wyznaczają pewien nowy schemat S^*. Zakładając, że $\varphi(1) \neq 0$ wykaż, że ze zbieżności schematu S wynika zbieżność schematu S^*. Czy można coś powiedzieć o rzędzie tych schematów?

Zadanie 12.* Sprawdź poprawność poniższych stwierdzeń (dla dowolnego $k \geqslant 1$):

(a) nie istnieje k–krokowy liniowy schemat rzędu $2k+1$;

(b) istnieje dokładnie jeden (niejawny) k–krokowy schemat rzędu $2k$;

(c) istnieje dokładnie jeden jawny k–krokowy schemat rzędu $2k-1$.

Zadanie 13.* Udowodnij, że nie istnieje schemat symetryczny nieparzystego rzędu.