Zadanie 1. Sprawdź, czy podane funkcje spełniają warunek Lipschitza (z jaką stałą?):

(a) $f : [0, 1] \ni x \to x^p \in \mathbb{R}$, gdzie $p > 0$;

(b) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \ni x \to \sqrt{|x|} \in \mathbb{R}$;

(c) $f : \mathbb{R} \ni x \to \sum_{i=1}^{n} a_i |x - x_i| \in \mathbb{R}$;

(d) $f : [0, 1] \times [0, 1] \ni (x, y) \to xy^2 + x^2 y \in \mathbb{R}$;

(e) $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to (2x - 3y + 1, -x + 4y - 2) \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 2. Czy a) suma, b) iloczyn, c) złożenie funkcji spełniających warunek Lipschitza jest również funkcją spełniającą ten warunek (z jaką stałą)?

Zadanie 3. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Wykaże, że f spełnia warunek Lipschitza ze stałą L wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest ograniczona przez L.

Zadanie 4. Podane równanie zapisz w postaci $y' = f(y)$:

(a) $x' = t^2 + x^2$;

(b) $x'' + 2t^2 x' + (\sin t)\, x = t^2 + 1$;

(c) $u' = uv + u^2 v$, $v' = u - v + 2uw$, $w' = u + \frac{v}{1+u}$.

Jaką postać, dla uzyskanego równania, przyjmą warunki początkowe wyjściowego równania?

Zadanie 5. [komp.] Wskaż przedział na którym poniższy problem początkowy ma rozwiązanie:

(a) $x' = 2te^{-x}$, $x(0) = 0$;

(b) $x' = 2x^2 - t$, $x(1) = 1$;

(c) $x' = t + e^x$, $x(1) = 0$;

(d) $x'' = t + e^x$, $x(1) = 0$, $x'(1) = 1$.

Zadanie 6. Wykaż, że jeżeli funkcja $f : \mathbb{R}^2 \ni (t, x) \to f(t, x) \in \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona dla $(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}$, to zagadnienie początkowe $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(a) = x_a$ ma rozwiązanie na przedziale $[a, b]$.

Zadanie 7. [komp.] Wskaż przedział na którym poniższy problem początkowy ma jednoznaczne rozwiązanie:

(a) $x' = 1/\cos x$, $x(0) = 0$;

(b) $x' = 2te^{-x}$, $x(0) = 0$.

Zadanie 8. [komp.] Wykaż, że zagadnienie początkowe $x' = t^2 + e^x$, $x(0) = 0$ ma jednoznaczne rozwiązanie dla $|t| \leq 0,351$.