Zadanie 1. Zbadaj rząd oraz oszacuj błąd lokalny schematu jednokrokowego (ozn. $f_k = f(t_k, x_k)$):

(a) jawnego schematu Eulera: $x_{k+1} = x_k + hf_k$;

(b) niejawnego schematu Eulera: $x_{k+1} = x_k + hf_{k+1}$;

(c) zmodyfikowanego schematu Eulera: $x_{k+1} = x_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{1}{2}hf_k\right)$;

(d) schematu Heuna: $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}(f_k + f(t_{k+1}, x_k + hf_k))$;

(e) schematu Taylora: $x_{k+1} = x_k + hf_k + \frac{h^2}{2}\left(f_{t,k} + f_{x,k}f_k\right)$,
gdzie $f_{t,k} = f'_t(t_k, x_k)$ oraz $f_{x,k} = f'_x(t_k, x_k)$.

Zadanie 2. Wyznacz rząd schematu $x_{k+1} = x_k + h(\alpha f_k + \beta f_{k+1})$ jako funkcję parametrów $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Pokaż, że numeryczne rozwiązanie zagadnienia

$$x' = x^{1/3}, \quad x(0) = 0$$

znalezione jawnym schematem Eulera nie przybliża funkcji $x(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$ będącej rozwiązaniem tego zagadnienia. Wyjaśnij zaistniałą sytuację.

Zadanie 4. Udowodnij, że zmodyfikowany schemat Eulera daje dokładne rozwiązanie (tj. $e_k = 0$, dla $k \in \mathbb{N}$) zagadnienia początkowego: $x' = -2at$, $x(t_0) = x_0$.

Zadanie 5. Pewna metoda numeryczna została zastosowana do całkowania równania różniczkowego na ustalonym przedziale. Dla różnych wartości kroku h otrzymano oszacowanie globalnego błędu metody e_k. Dane te zebrano w poniższej tabeli. Co można powiedzieć o rzędzie schematu na podstawie tych wyników?

h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
e_k	523×10^{-8}	65×10^{-8}	8×10^{-8}	1×10^{-8}

Zadanie 6. [komp.] Schematy z zadania 1 zastosuj do konstrukcji rozwiązania przybliżonego podanego zagadnienia początkowego na zadanym przedziale. Metodą połowienia kroku całkowego, wyznaczając błędy lokalne oraz błędy globalne, zbadaj eksperymentalnie rzędy tych schematów. Czy uzyskane wyniki eksperymentalne zgodne są z wynikami teoretycznymi?

(a) $x' = \frac{2(x+1)}{t+1}$, $x(0) = 1$ na przedziale $[0, 10]$;

(b) $x' = x - (1+t)^{-2} - (1+t)^{-1}$, $x(0) = 2$ na przedziale $[0, 1]$.

Zadanie 7. [komp.] Wykorzystując dowolnie wybrany zbieżny schemat jednokrokowy, stablicuj w przedziale $[0, 5]$ (z krokiem $h = \frac{1}{20}$) wartości dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego

$$F(x) = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Porównaj wyniki, przedstawiając na wspólnym wykresie uzyskane rozwiązania numeryczne oraz funkcję $x \to$`CDF[NormalDistribution[],`x`]`.

Zadanie 8. Zbadaj zgodność: a) jawnego i niejawnego schematu Eulera; b) schematu Heuna.

Zadanie 9. Rozważmy jawny schemat jednokrokowy $x_{k+1} = x_k + h\Phi_f(h, t_k, x_k)$. Wykaż, że jeżeli schemat ten jest zgodny oraz funkcja $\frac{\partial \Phi_f}{\partial h}$ jest ciągła, to rząd tego schematu jest nie mniejszy niż jeden. Jakie założenie dotyczące funkcji Φ_f należy dołożyć, aby otrzymać podobny wynik dla schematów niejawnych?

Zadanie 10. Wykaż, że dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$ istnieje jednokrokowy schemat rzędu p, który nie jest zgodny.

Zadanie 11*. Czy istnieje jednokrokowy zgodny schemat zerowego rzędu?