Zadanie 1. Wyznacz rząd schematu Rungego–Kutty:

(a) jednopoziomowego jawnego;

(b) jednopoziomowego niejawnego;

(c) dwupoziomowego jawnego.

Zadanie 2. Dany jest schemat dwupoziomowy typu Rungego–Kutty

$$x_{k+1} = x_k + h\left(a_1 K_1 + a_2 K_2\right),$$

w którym

$$K_1 = f\left(t_k + c_1 h, x_k\right), \qquad K_2 = f\left(t_k + c_2 h, x_k + bhK_1\right).$$

Jakie warunki muszą spełniać stałe a_1, a_2, b, c_1, c_2, aby schemat ten był rzędu 2?

Zadanie 3. Zbadaj zgodność schematu Rungego–Kutty

$$x_{k+1} = x_k + h\sum_{i=1}^{r} a_i K_i\left(h, t_k, x_k\right),$$
$$K_i\left(h, t, x\right) = f\left(t + c_i h, x + h\sum_{j=1}^{r} b_{ij} K_j\left(h, t, x\right)\right)$$

zakładając, że

(a) $b_{ij} = 0$ dla $i \le j$ (tj. jest to schemat otwarty);

(b) $b_{ij} = 0$ dla $i < j$.

Zadanie 4. Udowodnij, że schemat Rungego–Kutty postaci

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right), \tag{3.1}$$

gdzie

$$K_1 = f\left(t_k, x_k\right), \qquad K_2 = f\left(t_k + \tfrac{1}{2}h, x_k + \tfrac{1}{2}hK_1\right),$$
$$K_3 = f\left(t_k + \tfrac{1}{2}h, x_k + \tfrac{1}{2}hK_2\right), \qquad K_4 = f\left(t_k + h, x_k + hK_3\right)$$

daje dokładne rozwiązanie (tj. $e_k = 0$, dla $k \in \mathbb{N}$) zagadnienia początkowego $x'(t) = t^3 + t + 1$, $x(t_0) = x_0$.

Zadanie 5. [komp.]

(a) Przypuśćmy, że funkcja f nie zależy od x; uzasadnij, że schemat (3.1) jest rzędu 4.

(b) Zastosuj schemat (3.1) do znalezienia przybliżenia rozwiązania zagadnienia początkowego

$$x' = t\ln(t+1), \qquad x(0) = 1$$

na przedziale $[0, 10]$. Stosując metodę połowienia kroku, wyznacz eksperymentalnie rząd schematu.

Zadanie 6. Jedna z metod konstrukcji schematów jednokrokowych opiera się na następującym pomyśle: rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$x' = f(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

spełnia następujące równanie całkowe

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s)\, ds. \tag{3.2}$$

Zastępując całkę występującą w powyższym wyrażeniu jej przybliżeniem wynikającym z zastosowania kwadratury Simpsona

$$\int_a^b f(t)\, dt \approx Q(f, a, b) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right),$$

zależność (3.2) prowadzi do następującego schematu jednokrokowego

$$x_{k+1} = x_k + Q(f, t_k, t_{k+1}).$$

Wykaż, że schemat ten generuje ciąg przybliżeń $\{x_k\}$ identyczny z ciągiem wynikającym z zastosowania schematu (3.1).