Zadanie 1. Wyznacz obszary absolutnej stabilności podanych schematów jednokrokowych:

(a) otwartego i zamkniętego schematu Eulera;

(b) schematu trapezów;

(c) schematu Taylora $x_{k+1} = x_k + hf_k + \frac{h^2}{2}\left(f_{t,k} + f_{x,k}f_k\right)$,
gdzie $f_{t,k} = f'_t(t_k, x_k)$, $f_{x,k} = f'_x(t_k, x_k)$;

(d) zmodyfikowanego schematu Eulera: $x_{k+1} = x_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{1}{2}hf_k\right)$;

(e) schematu Heuna: $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\left(f_k + f\left(t_{k+1}, x_k + hf_k\right)\right)$;

(f) schematu Rungego–Kutty:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right),\\
K_1 &= f\left(t_k, x_k\right),\\
K_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}K_1\right),\\
K_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}K_2\right),\\
K_4 &= f\left(t_k + h, x_k + hK_3\right);
\end{aligned}$$

(g) schematu Rungego–Kutty:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{8}\left(K_1 + 3K_2 + 3K_3 + K_4\right),\\
K_1 &= f\left(t_k, x_k\right),\\
K_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{3}, x_k + \frac{h}{3}K_1\right),\\
K_3 &= f\left(t_k + \frac{2h}{3}, x_k - \frac{h}{3}K_1 + hK_2\right),\\
K_4 &= f\left(t_k + h, x_k + hK_1 - hK_2 + hK_3\right).
\end{aligned}$$

Zadanie 2. [komp.] Rozważmy układ liniowy:

(a) $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = -2x_1 - 4x_2 \end{cases}$ z warunkiem początkowym $\left(x_1(0), x_2(0)\right) = (1, 2)$;

(b) $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 - 4x_2 \end{cases}$ z warunkiem początkowym $\left(x_1(0), x_2(0)\right) = (1, 2)$.

Z jakim krokiem można całkować ten układ stosując schemat Heuna, aby uzyskane rozwiązanie przybliżone zbiegało do zera (wraz z $k \to \infty$)? Przeprowadź obliczenia z krokiem całkowym należącym oraz nienależącym do obszaru absolutnej stabilności tego schematu. Porównaj wyniki tego eksperymentu szkicując wyznaczone rozwiązania przybliżone oraz rozwiązanie dokładne.

Zadanie 3.* Udowodnij, że jeżeli $r \leq 4$, to obszar stabilności absolutnej dla $r-$poziomowych otwartych schematów Rungego–Kutty rzędu r, zależą jedynie od r, tj. są takie same dla schematów o takiej samej liczbie poziomów.

Zadanie 4. Wykaż, że schemat Rungego–Kutty

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\left(K_1 + K_2\right),$$

gdzie $K_1 = f\left(t_k, x_k\right)$ oraz $K_2 = f\left(t_k + h, x_k + \frac{h}{2}\left(K_1 + K_2\right)\right)$ jest $A-$stabilny.

Zadanie 5. Uzasadnij, że otwarte schematy Rungego–Kutty mają ograniczone obszary absolutnej stabilności.