Zadanie 1. Zbadaj zbieżność schematu

$$x_{k+2} + (\alpha - 1)\, x_{k+1} - \alpha x_k = \frac{1}{4} h \left((\alpha + 3)\, f_{k+2} + (3\alpha + 1)\, f_k \right)$$

w zależności od wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Rozważmy rodzinę otwartych schematów 2−krokowych

$$x_{k+2} + \alpha_1 x_{k+1} + \alpha_0 x_k = h \left(\beta_0 f_k + \beta_1 f_{k+1} \right).$$

Wyznacz wartości α_0, β_0 oraz β_1 w zależności od α_1, tak aby otrzymać schemat możliwie wysokiego rzędu. Zbadaj stabilność otrzymanego w ten sposób schematu w zależności od wartości parametru α_1.

Zadanie 3. Wyznacz przedział absolutnej stabilności schematu

$$x_{k+2} - x_{k+1} = \frac{h}{2} \left(3f_{k+1} - f_k \right).$$

Zadanie 4. Wyznacz przedziały absolutnej stabilności podanych schematów w zależności od parametru α leżącego w podanym obszarze jego zmienności:

(a) $x_{k+2} - (1 + \alpha)\, x_{k+1} + \alpha x_k = \frac{h}{2} \left((3 - \alpha)\, f_{k+1} - (1 + \alpha)\, f_k \right), \quad \alpha \in [-1, 1);$

(b) $x_{k+3} + \alpha \left(x_{k+2} - x_{k+1} \right) - x_k = \frac{h}{2} (3 + \alpha) \left(f_{k+2} + f_{k+1} \right), \quad \alpha \in (-3, 1).$

Zadanie 5. Wyznacz, jeżeli istnieją, te wartości parametru α dla których schemat

$$x_{k+2} + \alpha x_{k+1} - (1 + \alpha)\, x_k = \frac{h}{2} \left(-\alpha f_{k+2} + (4 + 3\alpha)\, f_{k+1} \right)$$

jest jednocześnie zbieżny, A−stabilny i rzędu drugiego.

Zadanie 6. Rozważmy liniowy schemat q−krokowy

$$\sum_{j=0}^{q} \alpha_j x_{k+j} = h \sum_{j=0}^{q} \beta_j f_{k+j},$$

którego współczynniki $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$ spełniają warunek

$$\alpha_j = -\alpha_{q-j}, \quad \beta_j = \beta_{q-j} \qquad (j = 0, 1, \ldots, q);$$

schematy takie nazywamy *schematami symetrycznymi*. Udowodnij, że wyrażenie

$$\frac{\rho\left(e^{i\alpha}\right)}{\sigma\left(e^{i\alpha}\right)},$$

gdzie ρ oraz σ to wielomiany charakterystyczne schematu, jest dla wszystkich wartości $\alpha \in [0, 2\pi)$ czysto urojone. Co na tej podstawie można powiedzieć o obszarze absolutnej stabilności schematów symetrycznych?

Zadanie 7. Udowodnij, że wielomiany charakterystyczne ρ oraz σ liniowego schematu q–krokowego symetrycznego spełniają równania: $\rho(s) = -s^q \rho(1/s)$ oraz $\sigma(s) = s^q \sigma(1/s)$.

Zadanie 8. Uzasadnij, że wszystkie niezerowe pierwiastki wielomianu charakterystycznego ρ odpowiadającego zbieżnemu schematowi symetrycznemu leżą na okręgu jednostkowym.

Zadanie 9*. Udowodnij, że nie istnieje schemat symetryczny nieparzystego rzędu.

Zadanie 10. Sprawdź poprawność poniższych stwierdzeń (dla dowolnego $k \geq 1$):

(a) nie istnieje k–krokowy liniowy schemat rzędu $2k+1$;

(b) istnieje dokładnie jeden (niejawny) k–krokowy schemat rzędu $2k$;

(c) istnieje dokładnie jeden jawny k–krokowy schemat rzędu $2k-1$.

Zadanie 11. Przypuśćmy, że wielomiany charakterystyczne ρ oraz σ pewnego schematu S mają wspólny dzielnik $\varphi \in \pi_n$, tj. $\rho(s) = \rho^*(s)\,\varphi(s)$ oraz $\sigma(s) = \sigma^*(s)\,\varphi(s)$. Wielomiany ρ^* oraz σ^* wyznaczają pewien nowy schemat S^*. Zakładając, że $\varphi(1) \neq 0$ wykaż, że ze zbieżności schematu S wynika zbieżność schematu S^*. Czy można coś powiedzieć o rzędzie tych schematów?