Akademia Górniczo-Hutnicza
Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej

WSTĘP DO INFORMATYKI

Adrian Horzyk

BŁĘDY NUMERYCZNE I POPRAWNOŚĆ OBLICZEŃ

POPRAWNOŚĆ OBLICZEŃ

Obliczenia prowadzone przy pomocy współczesnych komputerów mogą być bardzo dokładne i poprawne, lecz w wielu przypadkach wymaga to wiedzy o procesach obliczeniowych, arytmetyce komputerowej, zaokrąglaniu itp., żeby obliczenia zaprojektować i wykonywać w sposób poprawny numerycznie.

Obliczenia wykonywane na komputerach narażone są różne rodzaje błędów wynikające z:

- Ograniczonej dokładności danych źródłowych
- Ograniczonej ilości bitów na reprezentację danych
- Konwersjami pomiędzy systemami liczbowymi
- Zaokrągleń spowodowanych reprezentacją danych
- Obcięciami i uproszczeniami obliczeń wynikające z nieskończonych sum
- Trudnością wykonywania operacji na bardzo małych i dużych liczbach

Brak wiedzy na ten temat może prowadzić do błędnego budowania algorytmów i powstawania błędów numerycznych podczas obliczeń!

BŁĘDY NUMERYCZNE

Błędy numeryczne możemy podzielić na cztery podstawowe kategorie:

1. **Błędy danych wejściowych** – występują wówczas, gdy dane liczbowe wprowadzane do pamięci i rejestrów maszyny cyfrowej odbiegają od dokładnych ich wartości (np. fizycznych, biometrycznych) ze względu na ograniczoną dokładność urządzeń pomiarowych (np. ciężar, odległość).
2. **Błędy reprezentacji** – powstają, gdy występuje konieczność reprezentacji liczby w maszynie z wykorzystaniem skończonej długości słów binarnych (ciągów bitów), co wymusza zaokrąglanie. Do błędów reprezentacji dochodzi również na skutek konwersji wielu liczb rzeczywistych z systemu źródłowego (zwykle dziesiętnego) na system dwójkowy, stosowany w technice komputerowej, np. liczba 0,45 nie posiada swojego dokładnego odpowiednika w systemie dwójkowym, gdyż (0,45)[10] = (0.01(1100))[2]!
3. **Błędy obcięcia** – związane są z koniecznością zmniejszenia ilości działań, np. podczas obliczania ciągów/szeregów/sum nieskończonych lub przybliżonego wyznaczania całek oznaczonych.
4. **Błędy zaokrągleń** – pojawiają się w trakcie zaokrąglania obliczonych wartości z powodu ograniczonej długości słów binarnych.

BŁĘDY DANYCH WEJŚCIOWYCH

Urządzenia pomiarowe zawsze charakteryzują się ograniczoną dokładnością wykonywanych pomiarów wielkości fizycznych. Różne stosowane w przemyśle normy określają dopuszczalną wielkość odchyleń urządzeń pomiarowych od rzeczywistych wartości, jakie powinny wskazywać:

Stąd wynikają błędy danych wejściowych.

BŁĘDY REPREZENTACJI

Błędy reprezentacji najczęściej powstają w trakcie konwersji liczb pomiędzy systemami liczbowymi. O ile my ludzie jesteśmy przyzwyczajeni liczyć w systemie dziesiętnym, o tyle komputery stosują system dwójkowy.

Z tym związane są jednak pewne trudności, gdyż nie każde skończone rozwinięcie liczby w systemie dziesiętnym posiada takowe w systemie dwójkowym i vice versa! Może nam się więc wydawać, iż wpisujemy do komputera dokładną wartość, np. liczbę wymierną 0,45, lecz właśnie wtedy dochodzi do **błędu reprezentacji**, gdyż komputer od razu konwertuje taką liczbę na dwójkową postać wewnętrzną, a tu okazuje się, iż <u>nie istnieje dokładny odpowiednik tej liczby w systemie dwójkowym</u>, czyli skończone rozwinięcie dwójkowe, gdyż:

$$(0,45)[10] = \frac{(45)[10]}{(100)[10]} = \frac{(101101)[2]}{(1100100)[2]} = \big(0.01(1100)\big)[2]$$

$\sqrt{2}$

π

e

$(0,45)[10]$ * 2 = (0),90
$(0,90)[10]$ * 2 = (1),80
$(0,80)[10]$ * 2 = (1),60
$(0,60)[10]$ * 2 = (1),20
$(0,20)[10]$ * 2 = (0),40
$(0,40)[10]$ * 2 = (0),80

BŁĘDY OBCIĘCIA

Błędy obcięcia często związane są z przybliżaniem obliczeń nieskończonych:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^N}{N!} + \ldots \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^N}{N!}$$

gdy występuje konieczność pominięcia najmniej istotnych wyrazów wyrażenia.

Błędy obcięcia charakterystyczne są również w sytuacjach, gdy ze względu na zbyt długi czas obliczeń, decydujemy się na uproszczenie obliczeń pomijając mniej istotne szczegóły bądź ograniczamy dokładność przybliżeń, np. przy wyznaczaniu wartości całek oznaczonych:

$$I = \int_a^b y(x)dx \approx \frac{1}{2} h \sum_{n=0}^{N-1} \left(y_n + y_{n+1}\right) = T(h)$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

gdzie N jest ilością podziałów przedziału [a, b], a h szerokością tego przedziału.

BŁĘDY ZAOKRĄGLEŃ

Słowa binarne służące do zapisu liczb w technice cyfrowej dysponują ograniczoną ilością bitów możliwych do wykorzystania w celu zapamiętania określonej liczby. Można tego dokonać ze skończoną dokładnością.
Jeśli więc zabraknie bitów na reprezentację liczby, nieuniknione jest jej zaokrąglenie, np.:

W systemie dziesiętnym znane są sytuacje konieczności zaokrąglania:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333333\ldots \approx 0{,}333333 \qquad \frac{1}{6} = 0{,}166666\ldots \approx 0{,}166667$$

Podobnie dzieje się to w systemie dwójkowym, gdzie wynik pewnej operacji (np. dzielenia) nie posiada skończonego rozwinięcia dwójkowego lub rozwinięcie to przekracza maksymalną ilość dostępnych bitów w stosowanym słowie binarnym służącym do przechowywania wyniku działania.

Wtedy dochodzi do błędów zaokrągleń.

BŁĘDY ZAOKRĄGLEŃ

Jeśli mamy możliwość przechowywania tylko 10 cyfr znaczących, wtedy wynik takiego dodawania nie będzie taki, jaki byśmy się spodziewali na skutek wykonania operacji dodawania:

$$1234567890 + 0{,}123456789 = 1234567890{,}123456789$$

lecz po zaokrągleniu wyniku do 10 cyfr znaczących otrzymamy:

$$1234567890 + 0{,}123456789 = 1234567890$$

Dochodzi więc ponownie do błędu w wyniku zaokrąglenia.

A co się stanie, jeśli będziemy mieli pętlę obliczeniową, w której będziemy dodawali małą liczbę do dużej aż do osiągnięcia pewnej wartości pozwalającej na zakończenie się pętli?

```
# -*- coding: utf-8 -*-
x = 0;
while x<10000000000000000000000:
    x+=0.0000000000000000000001
print "The loop is finished!"
```

NIESTABILNOŚĆ NUMERYCZNA

Z niestabilnością numeryczną mamy do czynienia wtedy, gdy małe błędy danych lub popełniane w trakcie obliczeń rosną szybko w trakcie dalszych obliczeń powodując istotne/duże błędy/zniekształcenia wyników obliczeń.

PRZYKŁAD: Obliczanie ciągu całek oznaczonych:

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}dx = \int_0^1 \frac{x^n + 5x^{n-1} - 5x^{n-1}}{x+5}dx = \int_0^1 x^{n-1} - \frac{5x^{n-1}}{x+5}dx = \int_0^1 x^{n-1}dx - 5\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+5}dx = \frac{1}{n} - 5y_{n-1}$$

wyprowadzając zależność rekurencyjną:

$$y_n + 5y_{n-1} = \frac{1}{n}$$

umożliwiającą wyznaczenie następnego elementu ciągu całek na podstawie poprzedniego:

$$y_n = \frac{1}{n} - 5y_{n-1}$$

PRZYKŁAD NIESTABILNOŚCI NUMERYCZNEJ

Obliczamy więc element zerowy ciągu całek wg wzoru, dokonujemy zaokrąglenia wyniku do 3 cyfr znaczących i następnie próbujemy wyznaczyć kolejne elementy ciągu całek na podstawie poprzednich z wyznaczonej wcześniej zależności: $y_n = \frac{1}{n} - 5y_{n-1}$

$$y_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x+5} = \ln(x+5)\Big|_0^1 = \ln 6 - \ln 5 \approx 0{,}182$$ błąd $|\varepsilon| \le 5 \cdot 10^{-4}$

$$y_1 = 1 - 5y_0 \approx 0{,}090$$ błąd $|\varepsilon| \le 25 \cdot 10^{-4}$

$$y_2 = \frac{1}{2} - 5y_1 \approx 0{,}050$$ błąd $|\varepsilon| \le 125 \cdot 10^{-4}$

$$y_3 = \frac{1}{3} - 5y_2 \approx 0{,}083$$ błąd $|\varepsilon| \le 625 \cdot 10^{-4}$ ($y_3 > y_2$ – **nie poprawne!**)

$$y_4 = \frac{1}{4} - 5y_3 \approx -0{,}165$$ błąd $|\varepsilon| \le 3125 \cdot 10^{-4}$ (ujemna wartość – **absurd!**)

Całka oznaczona reprezentuje pole pod funkcją, a więc musi być nieujemne.

Dlaczego już w czwartym kroku otrzymaliśmy wartość ujemną całki?

Każdy następny wyraz ciągu potencjalnie mnoży wcześniejszy błąd przez 5!

PRZYKŁAD STABILNOŚCI NUMERYCZNEJ

Czy możemy więc taki ciąg całek obliczyć poprawnie?

Potencjalnie możemy również spróbować wyznaczyć poprzedni wyraz ciągu na podstawie kolejnego odpowiednio przekształcając wyprowadzoną zależność:

$$y_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{1}{5} y_n$$

Lecz skąd wziąć wartość n-tego wyrazu ciągu?

Załóżmy świadomie popełniając błąd, iż dwa kolejne wyrazy są jednakowe:

Przyjmiemy, że $y_{10} \approx y_9$ ponieważ $y_9 + 5y_9 = \frac{1}{10} \Rightarrow y_9 \approx \frac{1}{60} \approx 0{,}017$

$$y_8 = \frac{1}{45} - \frac{1}{5} y_9 \approx 0{,}019 \qquad y_5 = \frac{1}{30} - \frac{1}{5} y_6 \approx 0{,}028 \qquad y_2 = \frac{1}{15} - \frac{1}{5} y_3 \approx 0{,}058$$

$$y_7 = \frac{1}{40} - \frac{1}{5} y_8 \approx 0{,}021 \qquad y_4 = \frac{1}{25} - \frac{1}{5} y_5 \approx 0{,}034 \qquad y_1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{5} y_2 \approx 0{,}088$$

$$y_6 = \frac{1}{35} - \frac{1}{5} y_7 \approx 0{,}025 \qquad y_3 = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} y_4 \approx 0{,}043 \qquad y_0 = \frac{1}{1} - \frac{1}{5} y_1 \approx \underline{\underline{0{,}182}}$$

poprawny!!!

W tym przypadku okazuje się, iż mimo potencjalnie dużego błędu początkowego, otrzymany zerowy wyraz tego ciągu został wyznaczony poprawnie, gdyż błąd w każdym następny kroku był dzielony przez 5!

KUMULACJA BŁĘDÓW NUMERYCZNYCH

W trakcie różnych operacji arytmetycznych może dochodzić do kumulacji błędów, np. jeśli dwie liczby obarczone są pewnymi znanymi błędami danych wejściowych, to w wyniku wykonania operacji na tych liczbach błędy również zostaną poddane tej operacji powodując kumulację możliwych błędów.

PRZYKŁAD:

Jeśli $x_1 = 2{,}31 \pm 0{,}02$ i $x_2 = 1{,}42 \pm 0{,}03$, to jakie jest oszacowanie $x_1 - x_2$?

Największa możliwa wartość $x_1 = 2{,}33$

Najmniejsza możliwa wartość $x_2 = 1{,}39$

Największa możliwa wartość $x_1 - x_2 = 0{,}94$

Najmniejsza możliwa wartość $x_1 - x_2 = 0{,}84$

Więc $0{,}84 \le x_1 - x_2 \le 0{,}94 \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 0{,}89 \pm \underline{\underline{0{,}05}}$ **- BŁĄD ROŚNIE!**

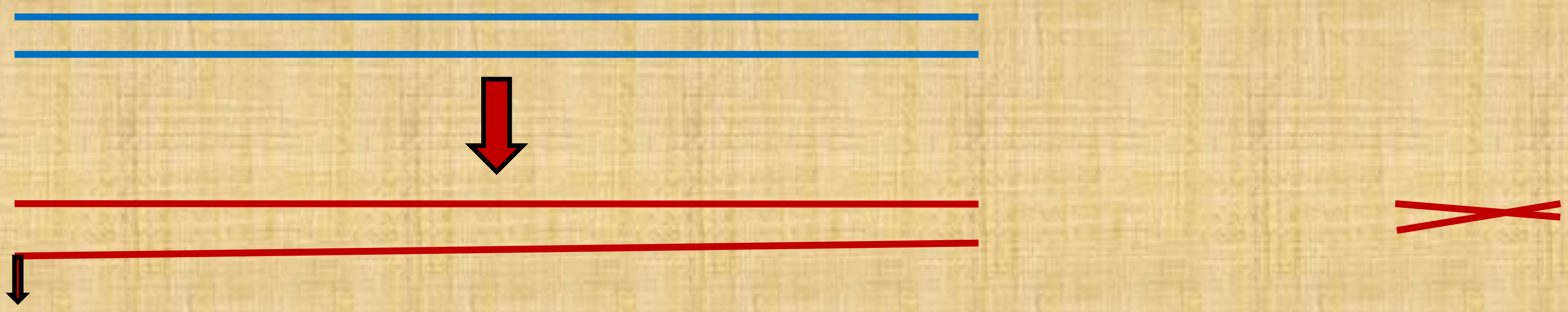
UWARUNKOWANIE ZADANIA

Zadanie jest źle uwarunkowane, jeśli względnie małe błędy danych początkowych powodują duże błędy wyników obliczeń.

Zadnie źle uwarunkowane obarczone jest dużymi błędami wyników niezależnie od zastosowanej metody lub algorytmu obliczania.

PRZYKŁAD: Proste równoległe w przestrzeni

Jeśli współrzędne punktów definiujących proste równoległe zostaną obarczone chociażby najmniejszym błędem, przestaną być równoległe i możliwe będzie wyznaczenie pewnego punktu ich przecięcia!



Uwarunkowanie zadania numerycznego to wrażliwość jego rozwiązania na poprawność danych początkowych.

BIBLIOGRAFIA I LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. L. Banachowski, K. Diks, W. Rytter: „Algorytmy i struktury danych”, WNT, Warszawa, 2001.
2. Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski: „Metody numeryczne”, WNT, Warszawa, 1993.
3. J. i M. Jankowscy: „Przegląd metod i algorytmów numerycznych”, WNT, Warszawa, 1988.
4. A. Kiełbasiński, H. Schwetlick: „Numeryczna algebra liniowa”, WNT, Warszawa 1992.
5. M. Sysło: „Elementy Informatyki”.
6. A. Szepietowski: „Podstawy Informatyki”.
7. R. Tadeusiewicz, P. Moszner, A. Szydełko: „Teoretyczne podstawy informatyki”.
8. W. M. Turski: „Propedeutyka informatyki”.
9. N. Wirth: „Wstęp do programowania systematycznego”.
10. N. Wirth: „ALGORYTMY + STRUKTURY DANYCH = PROGRAMY”.