

## Zestaw 11: Badanie przebiegu zmienności funkcji

**Zad I)** Wyznacz asymptoty funkcji:

a)  $f(x) = x(\operatorname{arcctg} x - \pi)$

b)  $f(x) = x \ln(e + \frac{1}{x})$

c)  $f(x) = 2x - \operatorname{arc} \cos \frac{1}{x}$

d)  $g(x) = (x - 1)e^{\frac{1}{x-1}}$

e)  $f(x) = x(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \pi)$

f)  $f(x) = (x + 1) \ln(\frac{2x+1}{x+1})$

g)  $h(x) = \operatorname{arc} \sin \frac{1}{1-x}$

h)  $f(x) = \frac{x}{2} \ln(e + \frac{2}{x})$

i)  $f(x) = 4x^2 \ln(1 - \frac{1}{2x})$

j)  $u(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2-4}$

k)  $f(x) = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$

l)  $w(x) = \frac{\sin x}{x-\pi}$

ł)  $f(x) = x \operatorname{arcctg} x + 2^{\frac{1}{x}}$

m)  $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

n)  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

**Zad II)** Wyznacz przedziały monotoniczności krzywych:

a)  $f(z) = \frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$

b)  $g(t) = t^2 \ln t$

c)  $h(x) = x^2 e^{-x^2}$

d)  $p(x) = x - 2 \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$

e)  $r(x) = x\sqrt{ax - x^2}, a > 0$

**Zad III)** Zbadaj ekstrema lokalne oraz monotoniczność funkcji:

a)  $f(x) = (x + 1)^3 \sqrt[3]{x^2}$

b)  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$

c)  $f(x) = \sqrt[3]{(x - 2)^2(2x + 1)}$

d)  $g(x) = x^2 e^{-x^2}$

e)  $h(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{\pi x^2}{8} - \frac{x-1}{2}$

f)  $l(x) = (x^2 - 2x) \ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x$

**Zad IV)** Zbadaj wypukłość oraz punkty przegięcia funkcji:

a)  $f(x) = (x - 1)e^{\frac{1}{x-1}}$

b)  $g(x) = x^2 e^{-x^2}$

c)  $f(x) = \frac{a}{x} \ln \frac{x}{a}, a > 0$

d)  $h(x) = x^4(12 \ln x - 7)$

e)  $l(x) = e^{-x^2}$

**Zad V)** Zbadaj przebieg zmienności funkcji i narysuj jej wykres:

- a)  $f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{x+2}}$
- b)  $f(x) = e^{-x^2}$
- c)  $u(t) = (t - 2)e^{\frac{1}{t-2}}$
- d)  $k(p) = pe^{\frac{1}{p}}$
- e)  $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$
- f)  $g(x) = \frac{x^4}{1+x^3}$
- g)  $f(x) = 4x^3 - x^4$
- h)  $f(x) = \frac{4x^2}{x^2+1}$
- i)  $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$
- j)  $f(x) = \sqrt{x + 3} - \sqrt{1 - x}$
- k)  $f(x) = (x - 5)^2\sqrt{x}$
- l)  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-4}}$
- ł)  $f(x) = xe^{-2x}$
- m)  $f(x) = x^3 \ln x$
- n)  $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$
- o)  $f(x) = \frac{1}{2}x + \arctg x$
- p)  $f(x) = x - 2 \arctg x$

**Zadania tekstowe:**

- 1) Wyznacz ekstrema lokalne funkcji  $f(x) = \sin x + \cos x$ .
- 2) Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji  $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ .
- 3) Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji  $g : x \rightarrow \arctg \frac{x-1}{x+1}$  w przedziale  $[0, 1]$ .
- 4) Wyznacz ekstrema globalne funkcji  $f : [-3, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $f(x) = x^2 e^x$ .
- 5) Znajdź przedział, w którym funkcja  $g : x \rightarrow \frac{e^x}{x+1}$  jest równocześnie rosnąca i wypukła.
- 6) Czy funkcja  $f : x \rightarrow \sqrt[3]{x^2}$  ma w punkcie  $x_0 = 0$  minimum lokalne? Odpowiedź uzasadnij.
- 7) Pień o przekroju kołowym ma średnicę o długości  $d$ . Trzeba obciosać go w taki sposób, aby otrzymać belkę o przekroju prostokątnym i o największej wytrzymałości (wytrzymałość belki prostokątnej jest proporcjonalna do iloczynu  $bh^2$ , gdzie  $b$  jest podstawą przekroju belki, a  $h$  wysokością).
- 8) Ze wszystkich stożków opisanych na kuli o promieniu  $R$  wskaż ten o najmniejszej objętości.