Zestaw 3: Logika i funkcje

Zad 1) Zapisz symbolicznie:
a) p jest liczbą pierwszą;
b) ciąg (a_n) jest od pewnego miejsca stały;
c) A jest zbiorem liczb parzystych;
d) x nie jest liczbą apierwszą;
e) liczby x i y mają takie same dzielniki pierwsze;
f) x przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1 lub 2.

Zad 2) Korzystając z definicji uzasadnij, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:
a) $f(x) = -4x + 5$, $\mathbb{R}$;
b) $h(x) = \frac{1}{x}$, $(-\infty, 0)$;
c) $q(x) = 4x - x^2$, $[2, \infty)$.

Zad 3) Uzasadnij, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:
a) $h(x) = \sqrt{x} - 3$, $[0, \infty)$;
b) $p(x) = x - \sqrt{x}$, $[\frac{1}{4}, \infty)$.

Zad 4)
a) Niech $f(x) = 2x$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = x^2$. Podaj wzór na $(h \circ g \circ f)(x)$.
b) Zapisz funkcję $\sin^4(e^{4\log^2 x^3})$ w postaci złożenia funkcji elementarnych.

Zad 5) Okresl maksymalną dziedzinę i przeciwdziedzinę, aby podane funkcje były bijekcjami oraz znajdź funkcje do nich odwrotne:
a) $f : x \to f(x) = x^2 + 1$;
b) $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$;
c) $h(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3}) - 1$;
d) $\sqrt{1 - \cos^2 x} + \sin x$;
e) $y = x^4 - 2x^2 + 1$;
f) $f(x) = x^2 - 2x$.

Zad 6)
a) Wyznacz $f^{-1}((\frac{7\pi}{6}, +\infty))$, $f^{-1}((\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}])$ i $f^{-1}((-\infty, \frac{\pi}{2}])$ dla $f : [-1, 1] \ni x \to \text{arccos x} \in \mathbb{R}$.
b) Niech $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$. Wyznacz $f(A)$ i $f^{-1}(B)$ dla $A = [-2, 2] \cup [3, 5)$ i $B = [\frac{1}{2}, 3]$.

Zad 7) Udowodnij, że:
a) złożenie dwóch funkcji iniektywnych jest iniekcją;
b) złożenie dwóch funkcji malejących jest funkcją rosnącą.