

## Zestaw 4: Granice ciągów

**Zad 1)** Wyznacz granice ciągów:

- a)  $\frac{n^3-n}{-2n^4+n-5}$
- b)  $\frac{(2n-1)^2}{n^2+3n-1}$
- c)  $\frac{6n^7-n^4+2n^3-1}{-n^5+2}$
- d)  $\frac{\sqrt[3]{n^2+3n}}{n+4}$
- e)  $\frac{3n^2-\sqrt{n^3+1}}{n^2-2n+4}$
- f)  $\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$
- g)  $\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^5+n}-n}$
- h)  $\frac{\sqrt[3]{8n^4+3}}{2n+1}$
- i)  $\frac{\sqrt[3]{8n^4+3}}{5n+2n+1}$
- j)  $\frac{\sqrt[3]{27n^4+2n^{100}+5\cdot 3n^4}}{\sqrt{10n-70}-7\sqrt[3]{20n+1}}$

**Zad 2)** Wyznacz granice ciągów:

- a)  $\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}$
- b)  $\sqrt[3]{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^2}$
- c)  $\sqrt{4n^2+n}-2n$
- d)  $n(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1})$

**Zad 3)** Wyznacz granice ciągów:

- a)  $\frac{\arctg(3n+1)}{\arctg(-2n+1)}$
- b)  $(\sqrt{3}-\cos\frac{\pi}{n})^n$
- c)  $\frac{1}{\arctg(n^2+1)-\frac{\pi}{2}}$
- d)  $(\frac{n+1}{2n})^n$
- e)  $(\frac{n^2+1}{n})^{\frac{n}{1-n}}$
- f)  $(n^2-n+1)^{\cos\frac{1}{n}}$
- g)  $\frac{n+1}{n[\ln(n+1)-\ln n]}$
- h)  $(n+4)[\ln(3n-1)-\ln(3n+1)]$

**Zad 4)** Wyznacz granice ciągów:

- a)  $(\frac{5n+2}{5n+1})^{15n}$
- b)  $(\frac{4n+2}{5n+1})^{15n}$
- c)  $(\frac{n^2-3}{n^2})^{2n^2-3}$
- d)  $(\frac{5n+2}{4n+1})^{15n}$
- e)  $(\frac{3n+2}{5n+2})^n \cdot (\frac{5n+3}{3n+1})^n$
- f)  $(\frac{n+4}{n+3})^{5-2n}$
- g)  $(\frac{3n-1}{3n+1})^{n+4}$
- h)  $(\frac{n^2+3}{n^2+1})^{2n^2+5}$
- i)  $(1+\frac{1}{n^2})^n$
- j)  $(1+\frac{4}{n})^n$
- k)  $(\frac{n+3}{n+5})^{3n^2-5}$
- l)  $(\frac{n^3+4n}{n+n^3})^{n^3-1}$
- m)  $(\frac{10-n^2+n^3}{n^3-3n+2})^{n^2-1}$
- n)  $(\frac{n^2+2n-3}{n^2+n})^{2n^2}$
- o)  $(\frac{n^2+2n-3}{n^2+n})^{-2n^2}$
- p)  $(\frac{n^2+2n-3}{n^2+n})^{\sqrt{n}}$

**Zad 5)** Wyznacz granice ciągów:

- a)  $\sqrt[n]{2 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n}$
- b)  $(2 \cdot 5^n + 4 \cdot 7^n - 3 \cdot 6^n)^{\frac{1}{n}}$
- c)  $(2 \cdot 5^n + 4 \cdot 7^n - 25 \cdot 6^n)^{\frac{1}{n}}$
- d)  $\sqrt[n]{3n + \sin n}$
- e)  $\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$
- f)  $\frac{1}{\sqrt[3]{1+n^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2+n^3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n+n^3}}$
- g)  $\sqrt[n+1]{2n+3}$
- h)  $\frac{2n^2 + \sin n!}{4n^2 - 3 \cos n^2}$

**Zad 6)** Wyznacz granice ciągów:

- a)  $\sqrt[n]{n^n + 5}$
- b)  $(\sin n - 2)n^2$

**Zad 7)** Wyznacz granice ciągów:

- a)  $\frac{n}{n^2+1} \sin(3n+1)$
- b)  $\frac{1+2+\dots+n}{n^3+1} \cos n!$

**Zad 8)** Wyznacz granice ciągów:

- a)  $n \sin \frac{\pi}{n}$
- b)  $\frac{\ln n}{n}$

**Zad 9)** Wyznacz jawny wzór na wyraz ciągu i zbadaj jego zbieżność:

- a)  $a_1 = 4; a_{n+1} = 4\sqrt[3]{a_n}$
- b)  $a_1 = 2; a_{n+1} = 2\sqrt[3]{a_n^2}$

**Zad 10)** Uzasadnij na podstawie odpowiedniej definicji:

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-n}{n+4} = -1$
- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n+5} = 0$
- c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2(n+3) = \infty$
- d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - n) = -\infty$

**Zad 11)** Zbadaj zbieżność ciągów (podaj ich punkty skupienia oraz kresy dolne i górne):

- a)  $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$
- b)  $b_n = \cos \frac{n\pi}{3}$
- c)  $c_n = 2^n + (-2)^n$
- d)  $d_n = \operatorname{tg} \frac{(2n+1)\pi}{4}$
- e)  $e_n = \frac{(-2)^{n+1}}{2^n+1}$
- f)  $f_n = (-5)^n + 1$
- g\*)  $g_n = \sin n$