

Zestaw 6: Ciągłość funkcji

Zad 1) Znajdź i zbadaj punkty nieciągłości funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin 5x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \\ \text{b) } g(x) &= \begin{cases} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \\ \text{c) } h(x) &= \begin{cases} \arctg \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \\ \text{d) } v(x) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \{0, \pi\} \\ \frac{\pi \sin x}{x(x-\pi)} & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pi\}. \end{cases} \end{aligned}$$

2) Określone poniżej funkcje są nieciągłe w punkcie 0. Dookreśl je tak, by były ciągłe w tym punkcie:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{\operatorname{tg} 3x}{5x}, \\ \text{b) } g(x) &= \sin x \sin \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

3) Znajdź wartości parametru p , dla którego dana funkcja określona następującym wzorem, we wskazanych punktach jest ciągła:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x^3-27}{x-3} & \text{dla } x \neq 3 \\ p & \text{dla } x = 3, \end{cases} \quad \text{w punkcie } x = 3, \\ \text{b) } f(x) &= \begin{cases} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x} & \text{dla } x \neq -2 \\ p^2 - 1 & \text{dla } x = -2, \end{cases} \quad \text{w punkcie } x = -2. \end{aligned}$$

4) Dookreśl (o ile to możliwe) wartość funkcji w danym punkcie, by była ona ciągła na zbiorze \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{\sin x}{|x|}, \text{ dla } x = 0, \\ \text{b) } g(x) &= \arctg \frac{1}{x-2}, \text{ dla } x = 2, \\ \text{c) } h(x) &= \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}, \text{ dla } x = 0, \\ \text{d) } r(x) &= \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}, \text{ dla } x = 0. \end{aligned}$$

5) Określ wartość parametrów a, b, c , dla których dana funkcja jest ciągła na zbiorze \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} & \text{dla } x \geq -7, x \neq -2, x \neq 2 \\ a & \text{dla } x = -2 \\ b & \text{dla } x = 2 \\ c & \text{dla } x < -7, \end{cases} \\ \text{b) } v(x) &= \begin{cases} 2 & \text{dla } x \leq 0 \\ a^x + b & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{dla } x \geq 1, \end{cases} \\ \text{c) } g(x) &= \begin{cases} \arctg \frac{a}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ b & \text{dla } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$